内 容 简 介

鞅空间理论是一个具有系统性成果和广泛历史背景的学科分支，它和经典分析、经典概率有着多方面的深刻联系。近年来，由于在值空间为 Banach 空间的框架之下考虑有关的结果，将鞅论、调和分析、Banach 空间几何学的研究有机结合起来。本书对近年来国内外学者在 Banach 空间值鞅的空间理论方面所取得的研究成果进行总结，力求内容新颖，论述严谨，条理清楚，便于读者自学。

本书内容包括：Banach 空间中概率论的基本知识，B 值鞅的一些基本结果，B 值鞅空间，鞅空间的原子分解理论，鞅 Hardy 空间的共轭理论，鞅空间的实内插理论。

本书可供高等院校数学学科的高年级本科生、研究生、教师及数学爱好者学习参考。

前 言

一、鞅空间理论的历史概况

鞅这一概念是法国概率学家 J. Ville 于 1939 年首先引入概率论的，他在 20 世纪 30 年代已作了若干初步的工作. Lévy 最早研究了鞅序列，但是将此发扬光大的要归功于美国的概率论学家 Doob，他于 1953 年在其名著《 Stochastic Process 》中首次系统总结了 Lévy 和他自己有关鞅的理论及应用成果，从而奠定了经典鞅论的理论基础，使鞅论成了随机过程理论的一个独立分支. 自此以后，关于鞅论的研究工作突飞猛进，其在理论和应用上的重要性也日益突出. 在这一发展过程中，有一日渐显著的重要特点是鞅论正在向其他数学分支渗透并与之结合形成许多新的分支. 这里所谈的“鞅空间理论”正是概率论与分析学两者的结合，更确切地说是鞅论与泛函分析、调和分析的结合. 概率论与分析数学相互结合而产生的另一个重要分支则是由 K. Itō所创立的随机分析理论，随机分析可以说是现代概率论中最为活跃的一个分支. 不过随机分析并不是本书所要讨论的内容.

20 世纪 70 年代，Fefferman 和 Stein[42] 系统地发展了 $\mathbf{R}^n$ 上的 H_p 空间理论，几乎与此同时，鞅论中的 H_p 理论也应运而生. 特别是由于 Burkholder、Gundy、Davis 等著名学者的杰出工作，形成了现代鞅论的一个新的分支——鞅空间理论(或称 H_p 鞅论).

1976 年，Burkholder 和 Gundy[15] 证明了著名的 Burkholder-Gundy 不等式. 这一不等式说明当 $1 < p < \infty$ 时，鞅的极大函数与均方函数具有等价的 L_p 范数，从而说明了鞅 Hardy 空间 H_p^S

和 H_p 相互等价．随后不久，Davis[24]将这一结果推广到 $p=1$ 的情况．1973 年 Garsia[44]和 Herz[46]引入了鞅的 BMO 空间并以此刻画了鞅 Hardy 空间 H_1^S 的共轭．1977 年，Bernard 与 Maisonneuve[6]在鞅论中引入了原子分解，为鞅 Hardy 空间的研究提供了有力工具，这一方法最近由 Weisz[79]作了重要发展．近 20 年来，这个领域的发展异常迅速，经典 H_p 论中的主要成果，如 H_1 与 BMO 的对偶、H_p 的原子分解、许多算子之间的 Φ-不等式，甚至加权 Φ-不等式以及 A_p 权等，大多已在鞅论中有了令人满意的对应．这些成果先后在 Garsia[44]、Durrett[33]、Long[64]和 Weisz[79]的专著中得到了系统的总结．

作为概率论和分析学两者的结合而形成的交叉领域，鞅空间理论既是鞅论的一个部分，同时也是 H_p 理论的一个侧面．作为后者，在一定意义下可以说它是古典 H_p 理论的某种概括和推广，但这一点仅仅是事情的一个方面，而使这一领域得以迅速发展的另一重要因素是鞅方法不仅为许多重要结论提供简捷的证明，而且还促使发现了许多新的内容．例如，应用鞅方法 Long 和 Qian 得到了 Calderon-Zygmmd 奇异积分算子理论中著名的 $T(b)$ 定理的简捷证明．再如，Burkholder 借助于鞅变换刻画了一类新型的 Banach 空间——UMD 空间．这说明鞅方法在分析学，特别是在调和分析研究中有着重要的作用，因此它同时受到概率论学家和分析学家两方面的关注．自 20 世纪 70 年代以来，这一领域的研究不仅发展异常迅速，而且研究范围也正在日益扩大，并由此产生了一些崭新的领域．

二、B 值鞅论的研究概况

前面所谈的鞅局限于标量值(实数值或复数值)，但自 20 世纪 80 年代初人们将注意力逐渐集中于 Banach 空间值鞅的研究上．从历史上看，虽然早在 1953 年 Kolmogorov 就引进了 Banach

空间值随机变量的特征泛函，1951 年 Fréchet 研究了 Banach 空间上的 Gauss 分布，1953 年 Movier 和 Fortet 研究了 Banach 空间值随机序列的大数定律，但是这一领域的研究受到广泛重视并得以迅猛发展则是近 20 多年来的事，下面是几个重要事例：

(1) 1966 年，Rieffel 定义了 Banach 空间的一个几何概念——可凹性，后来证明了 Banach 空间中的有界闭凸集 K 的可凹性与 K 的 Radon-Nikodym 性质是等价的．证明这一重要结论的工具即是鞅．

(2) 1976 年，Edgar 运用鞅方法证明了 Banach 空间中凸集的 Radon-Nikodym 性质与 Choquet 端点的可表示性是等价的．

(3) 1976 年，Hoffman-Jørgensen 与 Pisier 证明了 Banach 空间的 p-型与在其中取值的独立增量鞅满足大数定律相互等价．

(4) 1974 年，Pisier 利用鞅为工具，给出了著名的 Enfle 重赋范定理的概率证明，即超自反空间具有等价的一致凸范数这一重要结论．

(5) 鞅论应用于调和分析和 Banach 空间几何学的一个令人瞩目的成果是 Burkholder 的 UMD 空间(即具有无条件鞅差序列性质的空间)，事实证明这类空间在包括奇异积分算子理论在内的向量值调和分析中起着十分重要的作用．调和分析中一个十分重要的问题是 L_p 空间上 Hilbert 变换的有界性问题．对于 $\varepsilon>0$，考虑截断函数

$$H_\varepsilon f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{|s|>\varepsilon}\frac{f(t-s)}{s}\mathrm{d}s$$

M. Riesz 首先证明了当 $1\leqslant p<\infty$ 时，极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to0}H_\varepsilon f(t)$ $a.e.$ 存在，记其极限为 $Hf(t)$，称之为 $f(t)$ 的 Hilbert 变换，并且 M. Riesz又证明了当 $1<p<\infty$ 时，存在 $C_p>0$，使得

$$\|Hf\|_p\leqslant C_p\|f\|_p,\quad \forall\ f\in L_p$$

值得指出的是有反例证明上述不等式对 $p=1$ 不成立．

再看关于鞅变换的情况．对于鞅 $f_n=\sum\limits_{i=1}^{n}df_i$ 及其变换 $g_n=$

$\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i df_i$（这里 $\{\varepsilon_i\}$ 是一个 Bernoulli 序列），Burkholder 首先证明了当 $1 < p < \infty$ 时，存在 $C_p > 0$，使得

$$\| g \|_p \leqslant C_p \| f \|_p$$

以上是关于实值(或复值)的情况．向量值情况很早就引起人们的注意，即什么样的 Banach 空间 X 能使得在其中取值的函数的 Hilbert 变换或鞅变换满足相应的不等式？Burkholder 系统地研究了 Banach 空间值鞅的上述变换，并称使得在其中取值的鞅变换成立上述不等式的 Banach 空间为具有好鞅变换性质．其后，Bourgain 证明了 Banach 空间 X 的好鞅变换性质与其上 Hilbert 变换的有界性是相互等价的．更令人惊讶的是，Burkholder 随后又给出了好鞅变换性质的一个几何刻画，即 ξ- 凸性．他证明了 Banach 空间 X 具有好鞅变换性质当且仅当 X 是 ξ- 凸的，即存在函数 ξ：$X \times X \rightarrow \mathbf{R}$，使得

(i) $\xi(x,y) = \xi(y,x)$，$\forall\ (x,y) \in X \times X$；

(ii) $\forall\ y \in X$，$\xi(\cdot,y)$ 是凸函数；

(iii) 当 $\| y \| \leqslant 1$ 时，$\xi(x,y) \leqslant \| x+y \|$，且 $\xi(0,0) > 0$.

这样就证明了 Banach 空间 X 的好鞅变换性质、Hilbert 变换的有界性及其 ξ 凸性三者是相互等价的，它们确定的是同一类 Banach 空间即 UMD 空间(Banach Space in which all Martingale Differences are Unconditional)．UMD 空间的研究进一步揭示了鞅变换、调和分析及 Banach 空间几何中所存在的内在联系，极大地推动了这些领域的研究．

最近，Burkholder 和 G. Wang 等又应用鞅变换及 UMD 空间的一些特性研究了 Hilbert 空间上奇异积分算子、经典调和分析以及经典鞅论中若干不等式的最优系数，得到了许多十分精细的结果．

(6) 1990 年，刘培德首先对 Banach 空间值鞅引入了 p 均方算子和 p 条件均方算子，并以此为工具研究了一系列基本的 B 值

鞅不等式和鞅空间，揭示了 B 值鞅不等式和鞅空间的相互嵌入关系与在其中取值的 Banach 空间的一致凸性和一致光滑性之间的密切联系．这些在刘培德的专著《鞅与 Banach 空间几何学》中均有系统的阐述．

以上事实表明，向量值鞅的研究不仅仅是实值鞅的一种自然推广，而是将随机变量或随机过程的概率性质与在其中取值的抽象空间的结构或几何性质有机结合起来．鞅论在 Banach 空间几何理论方面的成功应用，显示了 B 值鞅理论有着不同于实值鞅的独立价值，因而成为人们关注的一个中心．

近年来，这一领域的研究出现了一个新的趋势，这就是鞅论与复 Banach 空间几何学的结合．复空间几何性质的研究最先来自关于向量值解析函数有关性质的研究，当人们发现这些性质对于实空间和复空间确有不同时，兴趣迅速增大．近十几年以来，许多学者将鞅方法应用于复 Banach 空间几何性质的研究并取得了丰硕成果．

1．解析 Radon-Nikodym 性质(ARNP)的鞅刻画．1982 年，Bukhvalov 与 Danilevich[10] 研究了单位圆中定义的 Banach 空间值解析函数的边界性质，由此定义了解析 Radon-Nikodym 性质．此后，1985 年，Dowling[30] 用有界算子和有界变差测度的可表示性刻画了 ARNP．1985 年，Edgar[37] 引入了复空间值解析鞅并应用 L_1 有界解析鞅的 a. e. 收敛性刻画了 ARNP．最近，刘培德、Saksman 和 Tylli 定义了弱解析 Radon-Nikodym 性质(WARNP)，并以 L_1 有界解析鞅(或 Hardy 鞅)标量收敛于 Pettis 可积函数刻画了 WARNP.

2．复凸性的鞅刻画．Davis[25] 最早研究了复拟 Banach 空间的复凸性，并用 H_p- 鞅不等式刻画了复空间的 PL 一致凸性．对于 H_p- 鞅和 H_p- shrub，刘培德和 Bekjan[57] 引入了 q 条件均方函数，并且证明了该函数的各种形式的有界性决定复空间的 PL 一致凸

性. 另外,刘培德和Bekjan还研究了H_p-shrub的各种类型的空

间以及H_p-shrub上的算子和q条件均方函数的增长速度与q-PL一致凸性的关系. 魏文展与刘培德[74]研究了在一般概率空间上定义的复对称鞅,应用这种鞅的不等式刻画了PL一致凸性.

代替PL一致凸性,1988年许全华[83]引入了H-一致凸性,这种复凸性更适用于对于向量值解析函数的研究. 许全华[84]用Hardy鞅的不等式刻画了H-一致凸性. 刘培德和Bekjan[58]定义了解析一致凸性,并应用Hardy鞅的q条件均方函数的有界性和凸Φ-不等式对之进行了刻画.

3. 解析UMD(AUMD)空间. 在B值鞅论中一个令人瞩目的成果是Burkholder的UMD空间,即具有无条件鞅差序列性质的空间,将其中的鞅分别换成解析鞅和Hardy鞅则得到AUMD空间和HUMD空间. 许全华首先证明了AUMD空间等价于HUMD空间,从而统称为AUMD空间. Garling指出,AUMD空间具有ARNP,并且每个AUMD空间具有等价的范数使之为q-PL一致凸空间($2 \leqslant q < \infty$). 刘培德和Bekjan应用鞅变换的不等式和强弱大数定律给出了AUMD的刻画,Blower则应用乘子理论刻画了AUMD空间.

复空间几何学研究至今方兴未艾,有关这一领域的研究已是当前的一个热点.

三、本书的主要内容

虽然对Banach空间值鞅的研究已有20多年的历史,但对Banach空间值鞅的Hardy空间理论研究则至多是近10年来的事情. 本书试图对近年来国内外学者在Banach空间值鞅的空间理论方面所取得的研究成果进行总结,其中有相当一部分内容是作者的研究工作. 本书共分为八章:第一章简要介绍一些Banach空间中概率论的基本概念;第二章主要介绍B值鞅的一些基本结

果；第三章初步引入B值鞅空间；第四章介绍鞅空间的原子分解理论；第五章和第六章是鞅Hardy空间的共轭理论；第七章介绍鞅平削算子的一类推广；第八章是鞅空间的内插理论(实方法).

顺便介绍一些国内出版的该领域相关著作：龙瑞麟著《H_p鞅论》主要介绍了实值鞅的Hardy空间理论，是我国此领域的第一部专著，乃经典著作；吴智泉、王向忱著《巴氏空间上的概率论》是我国第一本系统介绍Banach空间概率论的专著；刘培德著《鞅与Banach空间几何学》系统介绍鞅论在Banach空间几何学与调和分析中的应用，是当前国内在此领域最具权威性的专著；胡迪鹤、甘师信著《近代鞅论》有相当篇幅介绍了Banach空间值鞅和鞅型序列；万成高著《鞅的极限理论》侧重研究Banach空间值鞅的极限理论.而在国外，由Michel Ledoux和Michel Talagrand所著《Probability in Banach spaces》是一部极有影响的著作.本书前两章有许多材料参考了上述著作.

鞅空间理论是一个具有系统性成果和广泛历史背景的学科分支，它和经典分析、经典概率有着多方面深刻联系.近年来由于在值空间为Banach空间的框架之下考虑有关的结果，给这门学科注入了新的活力.它不仅使经典的理论呈现出新的面貌，而且带来了新的研究课题和新的研究方向，特别是将鞅论、调和分析、Banach空间几何学的研究有机结合起来.

在本书编写工作完成之际，我愿谈一点个人的体会：面对具有丰富历史和系统性成果的理论大厦，我仰慕它的缜密和精致，在包括概率论、泛函分析、调和分析的多种学科之间穿行的我感到知识海洋的浩瀚与广袤，同时感到要得到一点进展就要付出一份艰辛，在我真的做出一点成绩之时内心又是充满了喜悦.辛苦也好，喜悦也罢，我愿把在理论大厦中开掘出的这些成果看作我研究工作的起点，同时还希望起到抛砖引玉的作用，引起同仁更多的兴趣，促使这方面的研究工作有更多的发展.由于本人学识有限，本书错误和不妥之处在所难免，在此敬请批评指正，以期改进.

最后，借此机会对我的两位授业恩师：武汉大学的刘培德教授和华中科技大学的黄志远教授表示最诚挚的感谢！感谢两位导师多年来对学生的惠教、指导、关心和培养.衷心感谢武汉大学的许明浩教授、侯友良教授、杜金元教授，中国科学院武汉物理与数学研究所的欧阳才衡研究员，中山大学的任佳刚教授等诸位老师所曾给予的教诲和帮助！感谢我的同窗学友西北工业大学的丁晓庆教授、中国科学院数学与系统科学研究院的骆顺龙研究员、中国科学院武汉物理与数学研究所的陈泽乾研究员的关心和帮助.

感谢我的家人对于我的学习和工作所给予的关心和长期不懈的支持！

另外，本课题研究曾先后得到湖北省教育厅优秀中青年学者项目(98B016)和重点项目(2002A53008)、三峡大学科研基金项目(KJB0103)、三峡大学科技创新团队计划项目的资助，本书的出版得到三峡大学应用数学重点学科建设经费的资助，在此对三峡大学的领导和有关部门表示感谢.

于　林

2005年5月于宜昌

目　　录

第一章　B 值随机变量及其基本性质

本书研究的领域属于 Banach 空间中的概率论的一个分支，所要研究的主要对象是取值于 Banach 空间的一种特殊随机过程——鞅. 因此，首先必须建立无穷维向量值随机变量的概念.

无穷维向量值随机变量的概念是普通的随机变量和有限维随机向量概念的推广或者说一般化. Banach 空间或一般抽象空间中的概率论是将随机变量和随机过程视为适当的抽象空间中的随机向量和向量值随机过程这一种观点而发展起来的，突破了经典概率论的研究对象只局限于取实（或复）数值的随机变量这一限制.

关于抽象空间中随机变量的定义，有各种不同的形式，在一般情况下，它们还确实是彼此不同的概念. 本书采用现今比较通用的定义，它是普通的随机变量概念的一种自然的推广. 按照这一定义，抽象空间中的随机变量就是定义于一个概率空间上而取值于该抽象空间的某种可测函数. 因此，首先需要介绍一些关于向量值可测函数的知识. 另外，由于本书的研究范围局限于实 Banach 空间值鞅，所以下面的讨论都将值空间选取为实 Banach 空间.

§1.1　向量值可测函数与随机变量

设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间，称 σ 代数 $\mathscr{F}$ 是完备的，若 $A\in\mathscr{F}$，$P(A)=0$，则对任意的 $B\subset A$，都有 $B\in\mathscr{F}$. 根据测度论知识，任何 $\sigma-$代数都可以通过完备化使之成为完备的 $\sigma-$代数. 例如以 $\mathscr{Y}$ 表示 $\mathscr{F}$ 中的零概率集的全体子集，则 $\overline{\mathscr{F}}=\sigma\{A\triangle B\colon A\in\mathscr{F},B\in\mathscr{Y}\}$ 就是

$\mathscr{F}$ 的完备 $\sigma-$代数，其中 $A\triangle B=(A-B)\cup(B-A)$ 称为 A 与 B 的对称差. 对于任意的 $B\in\mathscr{Y}$，$A\in\mathscr{F}$，定义 $\overline{P}(A\triangle B)=P(A)$，则 $\overline{P}$ 是 $\overline{\mathscr{F}}$ 上的概率测度，称 $\overline{P}$ 是 $\overline{\mathscr{F}}$ 上的完备概率测度，$(\Omega,\overline{\mathscr{F}},\overline{P})$ 是完备的概率空间. 所以，若无特别说明，今后本书中所出现的概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 均为完备概率空间.

一、向量值可测函数的定义及基本性质

定义 1.1.1　设向量值函数 $f\colon\Omega\to X$，如果对于 X 上的任何连续线性泛函 $\varphi\in X^*$，数值函数 $\varphi[f(\omega)]$ 是 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的可测函数，则称 $f(\omega)$ 是 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的弱可测函数.

定义 1.1.2　称向量值函数 $f=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iI_{A_i}$ 为 Ω 上的阶梯函数（或者简单函数），若 $A_i\in\mathscr{F}$，$x_i\in X$，$i=1,2,\cdots,n$，$A_i\cap A_j=\Phi\ (i\neq j)$，$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega$；称向量值函数 $f=\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_iI_{A_i}$ 为 Ω 上的可数值函数（或者初等函数），若 $A_i\in\mathscr{F}$，$x_i\in X$，$i=1,2,\cdots$，$A_i\cap A_j=\Phi\ (i\neq j)$，$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=\Omega$.

显然，阶梯函数（或者简单函数）是可数值函数（或者初等函数）.

定义 1.1.3　称向量值函数 $f\colon\Omega\to X$ 为 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的强可测（或者简单地称可测）函数，如果存在阶梯函数列 $\{f_n\}$ 几乎处处强收敛于 f，即 $\exists\Lambda\in\mathscr{F}$，$P(\Lambda)=0$，$\forall\ \omega\in\Omega-\Lambda$，有 $\|f_n(\omega)-f(\omega)\|\to0\ (n\to\infty)$. 此时，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$，$a.e.$ 或 $f_n\to f$，$a.e.$.

定理 1.1.1　向量值函数 f 可测的充分必要条件是存在可数值函数列几乎处处收敛于 f.

证明　只需证明充分性. 设 $\{f_n\}$ 是可数值函数列，且几乎处处有 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$，即存在 $\Lambda_0\in\mathscr{F}$，$P(\Lambda_0)=0$，$\forall\ \omega\in\Omega-\Lambda_0$，

有

$$\lim_{n\to\infty}\| f_n(\omega) - f(\omega)\| = 0$$

对于每一个 $n \geqslant 1$，不妨设 $f_n = \sum_{k=1}^{\infty} x_n^k I_{E_n^k}$，其中，$E_n^k \in \mathscr{F}$，$x_n^k \in X$，$k = 1, 2, \cdots$. 由于 $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_n^k = \Omega$，故有 m_n 使得

$$P\left(\bigcup_{k=m_n+1}^{\infty} E_n^k\right) < \frac{1}{n^2}$$

令

$$\overline{f}_n = \begin{cases} f_n, & \text{当 } \omega \in \bigcup_{k=1}^{m_n} E_n^k \\ 0, & \text{当 } \omega \notin \bigcup_{k=1}^{m_n} E_n^k \end{cases}$$

于是，$\{\overline{f}_n\}$ 为阶梯函数列，且 $P(\overline{f}_n \neq f_n) \leqslant \frac{1}{n^2}$. 记 $\Lambda_1 = \overline{\lim_{n\to\infty}}\{\overline{f}_n \neq f_n\}$，由 Borel－Cantelli 引理知 $P(\Lambda_1) = 0$，对于任意的 $\omega \in \Omega - (\Lambda_0 \cup \Lambda_1)$，存在 $M > 0$，当 $n > M$ 时，$\omega \in \{\overline{f}_n = f_n\}$，故

$$\lim_{n\to\infty}\| \overline{f}_n(\omega) - f(\omega)\| = \lim_{n\to\infty}\| f_n(\omega) - f(\omega)\| = 0$$

即简单函数列 $\{\overline{f}_n\}$ 几乎处处收敛于 f，根据定义，知 f 可测. □

二、强可测与弱可测的关系

由定义容易得到下面的基本结果.

定理 1.1.2 向量值函数 f 是 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的可测函数，则 f 是弱可测函数，$\| f\|$ 是实值可测函数.

证明 因 f 是 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的可测函数，于是，存在简单函数列 $f_n = \sum_{i=1}^{k_n} x_n^i I_{A_n^i}$，$n \geqslant 1$，使得

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f, \ a.e.$$

对于简单函数列 $f_n = \sum_{i=1}^{k_n} x_n^i I_{A_n^i}$，及任意的 $\varphi \in X^*$，有

$$\varphi(f_n) = \sum_{i=1}^{k_n} \varphi(x_n^i)\ I_{A_n^i}$$

$$\| f_n\| = \sum_{i=1}^{k_n} \| x_n^i\|\ I_{A_n^i}$$

均为实值简单函数，且

$$\varphi(f_n) \to \varphi(f)\ ,\ \| f_n\| \to \| f\|, \ a.e.$$

因此，f 是弱可测函数，$\| f\|$ 是实值可测函数. □

那么，反过来，弱可测是否一定强可测呢？回答是否定的，首先考查下面的例子.

例 1.1.1 设 $\Omega = [0, 1]$，$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是 $[0, 1]$ 上的 Lebesgue 测度空间，Q 是 Ω 中的非可测集，$l_2[0, 1]$ 是指标为 $[0, 1]$ 中元素的函数，它使得每个元素 $\xi = (\xi_t)$ 满足 $\sum_{t\in[0,1]} \xi_t^2 < \infty$. 现定义函数 f：$\Omega \to l_2[0, 1]$，$f(\omega) = (\xi_t(\omega))$，$0 \leqslant t \leqslant 1$，$\omega \in \Omega$. 并且，当 $t \overline{\in} Q$ 或 $t \in Q$，$t \neq \omega$ 时 $\xi_t(\omega) = 0$，当 $t \in Q$ 并且 $t = \omega$ 时 $\xi_t(\omega) = 1$. 对于每一个 $0 \leqslant t \leqslant 1$，$\xi_t(\omega)$ 是 Ω 上的可测函数，对于每一个 $\varphi \in (l_2[0, 1])^*$，由 Riesz 表示定理，至多除去一点，$\varphi[f(t)] = 0$，$\varphi(f)$ 可测，从而 f 弱可测，但是

$$\| f(\omega)\| = \Big[\sum_{t\in[0,1]} |\xi_t(\omega)|^2\Big]^{\frac{1}{2}} = \begin{cases} 0, & \omega \overline{\in} Q \\ 1, & \omega \in Q \end{cases}$$

它是非可测集 Q 的示性函数，故不可测，由定理 1.1.2 知，f 不可测.

由此可见，弱可测并不一定强可测. 实际上，对于可测和弱可测的关系，我们将看到值域的可分性是关键的. 为此，引入下面的概念.

定义 1.1.4 称向量值函数 f：$\Omega \to X$ 为可分值的，如果 $\{f(\omega)：\omega \in \Omega\}$ 是 X 的可分子集；称 f 是几乎可分值的，如果存

在 $\Omega_0 \subset \Omega$，$\Omega_0 \in \mathscr{F}$，$P(\Omega_0)=0$，使得 $\{f(\omega): \omega \in \Omega - \Omega_0\}$ 是 X 的可分子集.

引理 **1.1.3** 设 $f: \Omega \to X$ 是 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的弱可测函数，若 f 是几乎可分值的，则 $\|f\|$ 是实值可测函数.

证明 由于 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是完备概率空间，则改变实值函数 $\|f(\cdot)\|$ 在零测集上的值并不影响其可测性，故不妨设 f 是可分值的，必要时再用 $\overline{\mathrm{span}\{f(\omega): \omega \in \Omega\}}$ 代替 X，其中 $\overline{\mathrm{span}\{f(\omega): \omega \in \Omega\}}$ 表示由集合 $\{f(\omega): \omega \in \Omega\}$ 张成的闭线性子空间. 因此，不失一般性，不妨设 X 本身是可分 Banach 空间. 因此，可设可列集 $\{x_i\}$ 在 X 中稠密且 $x_i \neq 0$，则由 Hahn－Banach 定理知：对每一个 x_i，存在 $\varphi_i \in X^*$，$\|\varphi_i\|=1$，使得 $\varphi_i(x_i)=\|x_i\|$. 由稠密性，对任何固定的 $x \in X$ 及任意 $\varepsilon > 0$，必有 j 使得 $\|x - x_j\| < \varepsilon$，从而

$$\begin{aligned}\|x\| - \varepsilon &\leqslant \|x_j\| = \varphi_j(x_j) \\ &\leqslant \sup_k |\varphi_k(x_j)| \leqslant \sup_k |\varphi_k(x)| + \varepsilon\end{aligned}$$

由 ε 的任意性得 $\|x\| \leqslant \sup_k |\varphi_k(x)|$. 而

$$|\varphi_k(x)| \leqslant \|\varphi_k\| \|x\| = \|x\|, (\forall k \geqslant 1)$$

故

$$\sup_k |\varphi_k(x)| \leqslant \|x\|$$

即

$$\|x\| = \sup_k |\varphi_k(x)|$$

由 $x \in X$ 的任意性，对于上述的 $f(\omega)$ 有

$$\|f(\omega)\| = \sup_k |\varphi_k(f(\omega))|, \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

由于 f 是弱可测的，故对每一个 $k \geqslant 1$，$\varphi_k(f)$ 为实值可测函数，从而，$\|f\|$ 为实值可测函数. □

定理 **1.1.4(B. J. Pettis)** 设向量值函数 $f: \Omega \to X$，则下列陈述等价：

(i) f 是可测的；

(ii) f 是弱可测的且是几乎可分值的.

证明 (i)⇒(ii)：由定理 1.1.2 知，f 是弱可测的，并由定理 1.1.1 知，存在可数值函数序列 $\{f_n\}$ 及零概集 Λ，使得

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega), \ \forall \ \omega \in \Omega - \Lambda$$

令

$$X_1 = \{ f_n(\omega): \omega \in \Omega - \Lambda, n = 1, 2, \cdots \}$$

则其闭包 $\overline{X_1}$ 是可分子集，显然

$$\{ f(\omega): \omega \in \Omega - \Lambda \} \subset \overline{X_1}$$

因此，f 是几乎可分值的，故(ii)成立.

(ii)⇒(i)：不妨设 f 是可分值的，从而可取 $x_k \in X$，$k=1, 2, \cdots$，使得

$$\{f(\omega): \omega \in \Omega\} \subset \overline{\{x_k, k \geqslant 1\}}$$

令

$$\Omega_{n_k} = \left\{\omega: \|f(\omega) - x_k\| < \frac{1}{n}\right\}$$

因 $f(\cdot) - x_k$ 是弱可测的且可分值的，由引理 1.1.3 知 Ω_{n_k} 为可测集. 又对每一个 $n \geqslant 1$，有 $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_{n_k}$，令

$$A_{n_k} = \Omega_{n_k} - \bigcup_{j=1}^{k-1} \Omega_{n_j}, \ k = 1, 2, \cdots$$

则 $\{A_{n_k}, k \geqslant 1\}$ 两两互不相交且 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n_k} = \Omega$，定义 $\{f_n\}$ 如下：

$$f_n(\omega) = x_k, \ \omega \in A_{n_k}, \ k = 1, 2, \cdots$$

则 $\{f_n\}$ 是可数值函数，且由其定义可知：对任意 $\omega \in \Omega$，有

$$\|f(\omega) - f_n(\omega)\| = \|f(\omega) - x_k\| < \frac{1}{n}$$

故 $\lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega)$. 由定理 1.1.1 知 f 是可测的，即(i)的结论成立. □

推论 **1.1.1** 向量值函数 $f: \Omega \to X$ 为可测的充分必要条件是存在可数值函数列 $\{f_n\}$ 和一个零概率集 Λ，使得在 $\Omega - \Lambda$ 上

$\{f_n\}$ 一致收敛于 f.

证明　由定理 1.1.1 知充分性显然成立，往证必要性. 设 f 是可测的，则由定理 1.1.4 知 f 是几乎可分值的，于是存在零测集 Λ，类似于定理 1.1.4 的证明，构造出可数值函数列 $\{f_n\}$，使得对一切 $\omega \in \Omega - \Lambda$，有

$$\| f_n(\omega) - f(\omega) \| < \frac{1}{n}$$

即 $\{f_n\}$ 在 $\Omega - \Lambda$ 上一致收敛于 f. □

推论 1.1.2　若 X 是可分 Banach 空间，向量值函数 $f: \Omega \to X$，则 f 可测与弱可测是等价的.

推论 1.1.3　设向量值函数 $f: \Omega \to X$ 是可测的，α 为任意实值可测函数，则 αf 是可测函数.

证明　对任意有界线性泛函 $\varphi \in X^*$，由定理 1.1.4 知 $\varphi(f)$ 是实值可测函数，从而 $\varphi(\alpha f) = \alpha\varphi(f)$ 为实值可测函数，即 αf 是弱可测的. 再由定理 1.1.4 知 f 是几乎可分值的，设 $\Lambda \in \mathscr{F}$，$P(\Lambda) = 0$，$\omega_n \in \Omega$，$n = 1,2,\cdots$ 满足 $\{f(\omega_n);\ n = 1,2,\cdots\}$ 稠密于 $\{f(\omega);\ \omega \in \Omega - \Lambda\}$，记 $\{r_k;\ k = 1,2,\cdots\}$ 为有理数全体及 $S = \{r_j f(\omega_i);\ i,j = 1,2,\cdots\}$，则 S 是 X 的可分子集，且满足

$$\{\alpha(\omega) f(\omega):\ \omega \in \Omega - \Lambda\} \subset \overline{S}$$

其中 $\overline{S}$ 表示 S 的闭包. 这表明 αf 是几乎可分值的，进而由定理 1.1.4 知 αf 是可测的. □

定理 1.1.5　设 $f_n: \Omega \to X$，$n \geqslant 1$ 是可测函数列，$f: \Omega \to X$，且 f_n 几乎处处弱收敛于 f，即 $\exists \Lambda \in \mathscr{F}$，$P(\Lambda) = 0$，$\forall \varphi \in X^*$，$\forall \omega \in \Omega - \Lambda$，有

$$\lim_{n \to \infty} \varphi\big(f_n(\omega)\big) = \varphi\big(f(\omega)\big)$$

则 f 是可测的.

证明　对每一个 $n \geqslant 1$，由定理 1.1.2 知 $\varphi(f_n)$ 是实值可测函数，从而 $\varphi(f)$ 是实值可测函数，故 f 是弱可测函数，又对每一个 $n \geqslant 1$，因 f_n 是可测函数，由定理 1.1.4 知：存在

$$\{x_n^j\}_{j \geqslant 1} \subset X,\ \Lambda_n \in \mathscr{F},\ P(\Lambda_n) = 0$$

使得 $\{x_n^j\}_{j \geqslant 1}$ 在 $\{f_n(\omega);\ \omega \in \Omega - \Lambda_n\}$ 中稠密. 令

$$X_0 = \overline{\operatorname*{span}_{n,j}\{x_n^j\}}$$

则 X_0 是闭的且可分的线性子空间，X_0 也是弱闭的，由 $\{f_n\}$ 几乎处处弱收敛于 f 得

$$\left\{ f(\omega):\ \omega \in \Omega - \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n\right) \right\} \subset X_0$$

但 $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n\right) = 0$，故 f 是几乎可分值的. 因而，据定理 1.1.4 知 f 是可测的. □

推论 1.1.4　设 $f_n: \Omega \to X$，$n \geqslant 1$ 是可测函数列，$f: \Omega \to X$ 且 f_n 几乎处处收敛于 f，则 f 是可测的.

证明　注意到 f_n 几乎处处收敛于 f 蕴涵 f_n 几乎处处弱收敛于 f，由上述定理知 f 是可测的. □

定理 1.1.6　设向量值函数 $f: \Omega \to X$ 可测，则存在简单函数列 f_n，使得

(i) $\| f_n \| \leqslant 2 \| f \|$，$n \geqslant 1$

(ii) $\lim\limits_{n \to \infty} f_n = f$，　a.e.

证明　由可测函数的定义知：存在简单函数列 g_n 使得 $\lim\limits_{n \to \infty} g_n = f$，　a.e.. 令

$$f_n = \begin{cases} g_n, & \| g_n \| \leqslant 2 \| f \| \\ 0, & \| g_n \| > 2 \| f \| \end{cases} \quad (\forall n \geqslant 1)$$

则 $\{f_n\}$ 为简单函数列且满足条件(i)与(ii).

三、算子值可测函数

为了便于以后讨论算子值随机变量和随机过程，下面简要介绍一点算子值可测函数的知识. 设 X，Y 均为实 Banach 空间，$L(X,Y)$ 表示定义在 X 上而取值于 Y 的有界线性算子全体，则 $L(X,Y)$ 按算子范数构成 Banach 空间. 于是，前面关于向量值函

数 $f:\Omega\to X$ 的讨论自然也适用于 $T:\Omega\to L(X,Y)$ 是算子值函数的特殊情况. 但在这种情况下，下列概念和结论的表达形式更适合于应用.

定义 **1.1.5** 设 $T:\Omega\to L(X,Y)$ 是算子值函数.

(i) 如果存在简单的算子值函数序列，按一致拓扑几乎处处收敛于 $T(\omega)$，则称 $T(\omega)$ 在 Ω 上一致可测；

(ii) 如果对任意的 $x\in X$，向量值函数 $T(\omega)x:\Omega\to Y$ 强可测，则称 $T(\omega)$ 在 Ω 上强可测；

(iii) 如果对任意的 $x\in X$，$\varphi\in Y^*$，$\varphi(T(\omega)x)$ 为实值可测函数，则称 $T(\omega)$ 在 Ω 上弱可测.

注*：容易看出，$T(\omega)$ 的一致可测性即是把 $T(\omega)$ 视为通常的向量值函数 $T:\Omega\to L(X,Y)$ 的强可测性.

算子值函数的三种可测性之间，有下述的重要关系.

定理 **1.1.7** 设 $T:\Omega\to L(X,Y)$ 是算子值函数，则

(i) $T(\omega)$ 强可测的充分必要条件是 $T(\omega)$ 弱可测，且对每个 $x\in X$，向量值函数 $T(\omega)x:\Omega\to Y$ 是几乎可分值的；

(ii) $T(\omega)$ 一致可测的充分必要条件是 $T(\omega)$ 弱可测，且在 $L(X,Y)$ 中是几乎可分值的.

证明 (i) 由定理 1.1.4 直接可得.

(ii) 必要性. 设 $T(\omega)$ 一致可测，则作为向量值函数 $T:\Omega\to L(X,Y)$ 是强可测的，由定理 1.1.4 知 $T(\omega)$ 在 Banach 空间 $L(X,Y)$ 中是几乎可分值的. 又由定义 1.1.5 知 $T(\omega)$ 必是 Ω 上强可测的，从而再由定理 1.1.4 知 $T(\omega)$ 是弱可测的.

充分性. 先证 $\|T(\omega)\|$ 可测. 由于 $T(\omega)$ 在 $L(X,Y)$ 中几乎可分值，故对任意的 $x\in X$，$T(\omega)x$ 在 Y 中几乎可分值，从而由(i)可知 $T(\omega)$ 强可测.

不妨设 $\{T(\omega):\omega\in\Omega\}$ 是可分的. 于是，可取到 $T_i\in L(X,Y)$，$i=1,2,\cdots$，使得 $\{T_i\}$ 在 $\{T(\omega):\omega\in\Omega\}$ 中稠密. 对每个 i，取 $\{x_{ij}\}$，满足

$$\|x_{ij}\|=1,\ \|T_ix_{ij}\|\geqslant\|T_i\|-\frac{1}{j}$$

由于 $T(\omega)$ 强可测，故 $\|T(\omega)x_{ij}\|$ 为实值可测函数.

注意到对确定的 $\omega\in\Omega$，显然有

$$\sup_{i,j}\|T(\omega)x_{ij}\|\leqslant\|T(\omega)\|$$

反之，对任意的 j，取 T_i，使 $\|T(\omega)-T_i\|\leqslant\frac{1}{j}$，这样

$$\begin{aligned}\sup_{i,j}\|T(\omega)x_{ij}\|&\geqslant\|T(\omega)x_{ij}\|\\&\geqslant\|T_ix_{ij}\|-\|(T(\omega)-T_i)x_{ij}\|\\&\geqslant\|T_i\|-\frac{2}{j}\\&\geqslant\|T(\omega)\|-\frac{3}{j}\end{aligned}$$

由于 j 的任意性，即得

$$\|T(\omega)\|=\sup_{i,j}\|T(\omega)x_{ij}\|$$

从而可知 $\|T(\omega)\|$ 可测.

再用 $T(\omega)$ 代替前面定理 1.1.4 中的 $f(\omega)$，并且重复定理 1.1.4 证明中(ii)⇒(i)的过程，即得 $T(\omega)$ 是一致可测的. □

四、Banach 空间值随机变量

以上讨论了取值于实 Banach 空间 X 的向量值可测函数. 实际上，前面的所有讨论对于定义于一般的有限完备测度空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 上的向量值函数都是适合的. 这里，仅是由于对概率论的兴趣，将之局限于完备概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$.

为了方便起见，以后总称定义在完备概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的取值于实 Banach 空间 X 的可测函数为 X 值随机变量. 特别地，当 $X=R$ 时，则称 R 值随机变量为实值随机变量.

设 $\{\xi_n\}$ 为实值随机变量序列，若存在 $\Lambda\in\mathscr{F}$，$P(\Lambda)=0$，使得

$$\xi_1(\omega) \leqslant \xi_2\omega) \leqslant \cdots \leqslant \xi_n(\omega) \leqslant \cdots, \ \forall\, \omega \in \Omega - \Lambda$$

则称 $\{\xi_n\}$ 为递增的(或非降的).

若存在 $\Lambda \in \mathscr{F}$, $P(\Lambda) = 0$,使得

$$\xi_1(\omega) < \xi_2\omega) < \cdots < \xi_n(\omega) < \cdots, \ \forall\, \omega \in \Omega - \Lambda$$

则称 $\{\xi_n\}$ 为严格递增的.

反之,类似地可定义递减的(或非升的)及严格递减的.

设 $\{f_t;\ t \in \triangle\}$ 为任意一个随机变量族,这里用 $\sigma\{f_t;\ t \in \triangle\}$ 表示由 $\{f_t;\ t \in \triangle\}$ 产生的 $\sigma-$ 代数.

若 f 是 X 值随机变量,$\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{F}$ 的任意一个子 $\sigma-$ 代数,f 关于 $\mathscr{B}$ 是可测的,则简记为 $f \in \mathscr{B}$.

§1.2 向量值函数的积分与随机变量的数学期望

既然向量值随机变量就是定义在概率空间上而取值于抽象空间的可测向量值函数,那么,要定义数学期望,首先必须定义向量值函数的积分.

对于向量值函数,如果 Ω 为某一个实数区间 $[a,b]$,自然也可以像在数学分析中所做的那样来定义向量值函数的 Riemann 积分,但是这在应用上往往受到较大的限制.于是,根据实变函数论的启示,讨论更为一般的 Lebesgue 积分.把向量值函数的 Riemann 积分推广到更为一般的 Lebesgue 积分,可以有强和弱两种不同的方法,它们分别导致 Bochner 积分和 Pettis 积分的概念.本书中用到的主要是 Bochner 积分,因此,着重介绍 Bochner 积分.不过处于知识系统性的考虑,首先从 Pettis 积分的简单介绍开始.

仍同前节一样,这里恒设 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 为完备概率空间,$(X, \|\cdot\|)$ 是实 Banach 空间.

一、Pettis 积分

定义 1.2.1 设有向量值函数 $f: \Omega \to X$,称 $f(\omega)$ 是 Pettis 可积的,若对任意的 $E \in \mathscr{F}$,存在 $x_E \in X$,使得对一切有界线性泛函 $\varphi \in X^*$,积分 $\int_E \varphi f(\omega)\mathrm{d}P$ 存在,且

$$\int_E \varphi(f(\omega))\mathrm{d}P = \varphi(x_E)$$

此时,记

$$(P)\int_E f(\omega)\mathrm{d}P = x_E$$

并称 x_E 是 $f(\omega)$ 在 E 上的 Pettis 积分.

注意,当 $f(\omega)$ 是 Pettis 可积时,在每一个 $E \in \mathscr{F}$ 上,Pettis 积分 $(P)\int_E f(\omega)\mathrm{d}P$ 是唯一的,这是 Hahn-Banach 定理的直接推论.

根据定义,可以直接得到关于 Pettis 积分的如下基本性质:

(1) 当 $X = R$ 时,Pettis 积分即是通常的数值函数的积分;

(2) Pettis 可积的向量值函数是弱可测的;

(3) 当 $f_1(\omega)$, $f_2(\omega)$ 均为 Pettis 可积时,线性组合 $\alpha f_1(\omega) + \beta f_2(\omega)$ 也是 Pettis 可积,且 $\forall\ E \in \mathscr{F}$,有

$$\begin{aligned}&(P)\int_E \left[\alpha f_1(\omega) + \beta f_2(\omega)\right]\mathrm{d}P \\ &= \alpha\left\{(P)\int_E f_1(\omega)\mathrm{d}P\right\} + \beta\left\{(P)\int_E f_2(\omega)\mathrm{d}P\right\}\end{aligned}$$

(4) 如果 $f(\omega) = g(\omega)$, $a.e.$,则它们的 Pettis 可积性是一致的,而且当 Pettis 可积时,$\forall\ E \in \mathscr{F}$,有

$$(P)\int_E f(\omega)\mathrm{d}P = (P)\int_E g(\omega)\mathrm{d}P$$

下面,在自反空间的条件下,讨论向量值函数的 Pettis 可积性条件.

定理 1.2.1 设 X 是自反 Banach 空间，$f(\omega)$ 是 $\Omega \to X$ 的向量值函数，且对任意的 $\varphi \in X^*$，$\int_\Omega \varphi\big(f(\omega)\big)\mathrm{d}P$ 存在，则 $f(\omega)$ 是 Pettis 可积的.

证明 $\forall\ E \in \mathscr{F}$，显然，$\int_E \varphi\big(f(\omega)\big)\mathrm{d}P$ 存在. 定义 X^* 上的线性泛函 F 如下：

$$F(\varphi) \triangleq \int_E \varphi(f(\omega))\mathrm{d}P, \qquad \forall\, \varphi \in X^*, \qquad E \in \mathscr{F}$$

如果能证明 $F \in X^{**}$，由于 X 是自反的，便可取 $x_E \in X$，使

$$F(\varphi) = \varphi(x_E), \qquad \forall\, \varphi \in X^*, \qquad E \in \mathscr{F}$$

由以上两式可知 $f(\omega)$ 是 Pettis 可积的，且在 E 上的 Pettis 积分值就是 x_E.

考查线性算子 T：$X^* \to L_1(E,\mu)$，其定义为

$$T\colon \varphi \to \varphi\big(f(\omega)\big), \qquad \forall\, \varphi \in X^*$$

则 T 是闭算子. 实际上，设 φ_n，$\varphi \in X^*$，$\|\varphi_n - \varphi\| \to 0$，又设 $\psi \in L_1(E,\mu)$，$\|T\varphi_n - \psi\|_{L_1} \to 0$. 显然 $\varphi \in D(T)$（T 的定义域），又对任意的 $\omega \in \Omega$，

$$\Big|\varphi_n\big(f(\omega)\big) - \varphi\big(f(\omega)\big)\Big| \leqslant \|\varphi_n - \varphi\|\ \|f(\omega)\| \to 0$$

另一方面，

$$\|\varphi_n\big(f(\omega)\big) - \psi\|_{L_1} = \|T\varphi_n - \psi\|_{L_1} \to 0$$

因此必有 $\varphi\big(f(\omega)\big) = \psi(\omega)$，$a.e.$，从而 $T\varphi = \psi$，这就证明了 T 是闭的. 由闭图像定理知，T 是有界的，于是

$$\begin{aligned}\Big|F(\varphi)\Big| &\leqslant \int_E \Big|\varphi(f(\omega))\Big|\mathrm{d}P \\ &= \|T\varphi\| \leqslant \|T\|\ \|\varphi\|\end{aligned}$$

即 $F \in X^{**}$. □

最后，说明 Pettis 积分与有界线性算子的作用可以交换次序.

定理 1.2.2 设 X、Y 均为 Banach 空间，$T \in L(X,Y)$，如果向量值函数 $f{:}\Omega \to X$ 是 Pettis 可积的，则向量值函数 $T(f(\cdot))$：$\Omega \to Y$ 也是 Pettis 可积的，而且 $\forall\ E \in \mathscr{F}$，有

$$(P)\int_E T\big(f(\omega)\big)\mathrm{d}P = T\Big\{(P)\int_E f(\omega)\mathrm{d}P\Big\}$$

证明 $\forall\ E \in \mathscr{F}$，记 $x_E = (P)\int_E f(\omega)\mathrm{d}P$. 由 Pettis 积分的定义知，只要证明对每一个 $\varphi \in Y^*$，$\varphi(T(f(\omega))) \in L_1(E,P)$，且

$$\int_E \varphi\Big(T\big(f(\omega)\big)\Big)\mathrm{d}P = \varphi\big(T(x_E)\big)$$

即可.

设 T 的共轭算子为 T^*. 对 $\varphi \in Y^*$，有 $T^*\varphi \in X^*$，因此

$$\varphi\big(Tf(\omega)\big) = (T^*\varphi)(f(\omega)) \in L_1(E,P)$$

而且

$$\begin{aligned}\int_E \varphi\Big(T\big(f(\omega)\big)\Big)\mathrm{d}P &= \int_E (T^*\varphi)(f(\omega))\mathrm{d}P \\ &= (T^*\varphi)(x_E) = \varphi(Tx_E)\end{aligned}$$

□

二、Bochner 积分

（一）Bochner 积分的定义

定义 1.2.2 （i）设有可数值的向量值函数 f：$\Omega \to X$，$\Omega = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$，其中 $\{E_k\}$ 是 Ω 中一列互不相交的可测集，

$$f(\omega) = x_k, \quad \omega \in E_k,\ k = 1,2,\cdots \tag{1.2.1}$$

如果 $\|f(\omega)\|$ 可积，则称 $f(\omega)$ 是 Bochner 可积的，且对 $E \in \mathscr{F}$，定义其 Bochner 积分为

$$(B)\int_E f(\omega)\mathrm{d}P = \sum_{k=1}^{\infty} x_k P(E \cap E_k) \tag{1.2.2}$$

（ii）如果向量值函数 $f(\omega)$ 是 Bochner 可积的可数值函数列

$\{f(\omega)_n\}$ 的几乎处处强收敛的极限，且

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \| f(\omega) - f_n(\omega) \| \mathrm{d}P = 0 \qquad (1.2.3)$$

则定义 $f(\omega)$ 在 $E\in\mathscr{F}$ 上的 Bochner 积分为

$$(B)\int_E f(\omega)\mathrm{d}P = \lim_{n\to\infty}(B)\int_E f_n(\omega)\mathrm{d}P \qquad (1.2.4)$$

注*：关于这个定义的合理性特作如下说明：

1. 在(ii)中，由于 $f_n(\omega)$ 都是可数值的，因而，其强极限函数 $f(\omega)$ 是强可测的，因此数值函数 $\| f(\omega)-f_n(\omega)\|$ 是可测函数，从而(1.2.3)式左边的积分是可以定义的.

2. 序列 $\left\{(B)\int_E f_n(\omega)\mathrm{d}P\right\}$ 是 Banach 空间 X 中的 Cauchy 序列，实际上，由可数值函数 Bochner 积分的定义(i)，可得

$$\begin{aligned}
&\left\| (B)\int_E f_n(\omega)\mathrm{d}P - (B)\int_E f_m(\omega)\mathrm{d}P \right\| \\
&= \left\| (B)\int_E (f_n(\omega) - f_m(\omega))\mathrm{d}P \right\| \\
&\leqslant \int_E \| f_n(\omega) - f_m(\omega) \| \mathrm{d}P \\
&\leqslant \int_\Omega \| f_n(\omega) - f(\omega) \| \mathrm{d}P + \int_\Omega \| f_m(\omega) - f(\omega) \| \mathrm{d}P \to 0 \\
&\qquad (m\to\infty,\ n\to\infty)
\end{aligned}$$

因此，(1.2.4)式右边的极限存在.

3. 易知(1.2.4)式右边的极限与满足(1.2.3)式的 $\{f_n(\omega)\}$ 的选取无关，这是因为满足(1.2.3)式的任意两列可数值函数交错排列后得到的序列仍然满足(1.2.3)式.

定理 1.2.3 Bochner 可积的函数必 Pettis 可积，且在每一个 $E\in\mathscr{F}$ 上，两种积分取值相同.

证明 设有如同定义所述的 Bochner 可积函数 $f(\omega)$ 及可数值函数列 $\{f_n(\omega)\}$. 由定义易见，可积的可数值函数 $\{f_n(\omega)\}$ 是 Pettis 可积的，且积分值相同，即对任意的线性泛函 $\varphi\in X^*$，有

$$\varphi\left((B)\int_E f_n(\omega)\mathrm{d}P\right) = \int_E \varphi(f_n(\omega))\mathrm{d}P \qquad (1.2.5)$$

其次，由于 $\varphi(f(\omega))$ 是可测函数列 $\{\varphi(f_n(\omega))\}$ 几乎处处收敛的极限，故是可测的，且有

$$\begin{aligned}
&\left| \int_E \varphi(f_n(\omega))\mathrm{d}P - \int_E \varphi(f(\omega))\mathrm{d}P \right| \\
&\leqslant \int_E \|\varphi\| \ \| f_n(\omega) - f(\omega) \| \mathrm{d}P \to 0 \qquad (1.2.6)
\end{aligned}$$

又由于 $\left\| (B)\int_E f_n(\omega)\mathrm{d}P - (B)\int_E f(\omega)\mathrm{d}P \right\| \to 0$，所以

$$\left| \varphi\left((B)\int_E f_n(\omega)\mathrm{d}P\right) - \varphi\left((B)\int_E f(\omega)\mathrm{d}P\right) \right| \to 0 \qquad (1.2.7)$$

由(1.2.3)、(1.2.6)、(1.2.7)三式可以得到

$$\varphi\left((B)\int_E f(\omega)\mathrm{d}P\right) = \int_E \varphi(f(\omega))\mathrm{d}P$$

此说明 $f(\omega)$ 是 Pettis 可积的，且

$$(P)\int_E f(\omega)\mathrm{d}P = (B)\int_E f(\omega)\mathrm{d}P$$ □

根据以上定理的结论，既然当 $f(\omega)$ 的 Bochner 积分存在时，其 Bochner 积分取值与 Pettis 积分的值一致，则以后就把 Bochner 积分 $(B)\int_E f(\omega)\mathrm{d}P$ 简记为 $\int_E f(\omega)\mathrm{d}P$.

众所周知，对于可测的数值函数而言，可积与绝对可积是等价的，这是 Lebesgue 积分理论中的一个重要结论. 相应地，对于向量值函数的 Bochner 积分而言，也有下面重要结果.

定理 1.2.4 向量值函数 $f:\Omega\to X$ 是 Bochner 可积的充分必要条件是 $f(\omega)$ 强可测，且 $\int_\Omega \| f(\omega) \| \mathrm{d}P < \infty$.

证明 (1) 必要性. 设 $f(\omega)$ 是 Bochner 可积的，于是，存在可积的可数值函数列 $\{f_n(\omega)\}$，$\{f_n(\omega)\}$ 几乎处处强收敛于 $f(\omega)$，故 $f(\omega)$ 强可测，且由 $\| f_n(\omega) \| \in L_1(\Omega,\mathscr{F},P)$，当 n 充分大时，由 $f(\omega)$ 可积的定义得知 $\int_\Omega \| f(\omega) - f_n(\omega) \| \mathrm{d}P < \infty$. 因此

$$\int_\Omega \| f(\omega) \| \mathrm{d}P \leqslant \int_\Omega \| f_n(\omega) \| \mathrm{d}P + \int_\Omega \| f(\omega) - f_n(\omega) \| \mathrm{d}P < \infty$$

(2) 充分性. 设 $f(\omega)$ 可测，且 $\int_\Omega \| f(\omega) \| \mathrm{d}P < \infty$. 于是，存在一列互不相交的可测集 $E_n \in \mathscr{F}$，满足 $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$，且 $0 \leqslant P(E_n) < \infty$，$n = 1,2,\cdots$.

$\forall\, \varepsilon > 0$，由定理 1.1.1 可取到可数值函数 $f_{n_\varepsilon}(\omega)$，使得对 E_n 上几乎所有 ω 成立

$$\| f_{n_\varepsilon}(\omega) - f(\omega) \| < \frac{\varepsilon}{2^n (P(E_n) + 1)} \tag{1.2.8}$$

作 Ω 上的可数值函数 f_ε :

$$f_\varepsilon(\omega) = f_{n_\varepsilon}(\omega), \quad \omega \in E_n,\ n = 1,2,\cdots \tag{1.2.9}$$

由(1.2.8)、(1.2.9)式可得

$$\int_\Omega \| f(\omega) - f_\varepsilon(\omega) \| \mathrm{d}P \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n (P(E_n) + 1)} P(E_n) \tag{1.2.10}$$

因此，

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \| f(\omega) - f_\varepsilon(\omega) \| \mathrm{d}P = 0 \tag{1.2.11}$$

另一方面，

$$\int_\Omega \| f_\varepsilon(\omega) \| \mathrm{d}P \leqslant \int_\Omega \| f(\omega) \| \mathrm{d}P + \int_\Omega \| f(\omega) - f_\varepsilon(\omega) \| \mathrm{d}P < \infty \tag{1.2.12}$$

即 $f_\varepsilon(\omega)$ 是可积函数. 由(1.2.11)、(1.2.12)式及 Bochner 积分的定义，得知 $f(\omega)$ 是 Bochner 可积的. □

(二) Bochner 可积函数的基本性质

Bochner 积分具有通常的 Lebesgue 积分类似的若干基本性质，它们在今后的应用中都十分重要. 由于根据 Bochner 积分的定义这些性质都不难验证，因此为节省篇幅，以下仅叙而不证.

定理 **1.2.5** 设向量值函数 f, g 为 Bochner 可积的，则

(i) 对任意的数 α, β，$\alpha f(\omega) + \beta g(\omega)$ 也是 Bochner 可积的，且 $\forall\, E \in \mathscr{F}$，有

$$\int_E \left[\alpha f(\omega) + \beta g(\omega)\right] \mathrm{d}P = \alpha \int_E f(\omega) \mathrm{d}P + \beta \int_E g(\omega) \mathrm{d}P$$

(ii) 如果 $f(\omega) = g(\omega)$，$a.e.$，则

$$\int_E f(\omega) \mathrm{d}P = \int_E g(\omega) \mathrm{d}P, \quad \forall\, E \in \mathscr{F}$$

(iii) $\left\| \int_E f(\omega) \mathrm{d}P \right\| \leqslant \int_E \| f(\omega) \| \mathrm{d}P, \quad \forall\, E \in \mathscr{F}$

对应于古典分析中的 Lebesgue 控制收敛定理，对于 Bochner 积分有如下结论.

定理 **1.2.6** 设 $\{f_n(\omega)\}$ 为 Bochner 可积函数序列且几乎处处强收敛于 $f(\omega)$，$F(\omega) \in L_1(\Omega, \mathscr{F}, P)$，满足 $\| f_n(\omega) \| \leqslant F(\omega)$，$n = 1,2,\cdots$，则 $f(\omega)$ 为 Bochner 可积，而且

$$\lim_{n \to \infty} \int_E f_n(\omega) \mathrm{d}P = \int_E f(\omega) \mathrm{d}P, \quad \forall\, E \in \mathscr{F}$$

定理 **1.2.7** 设 $\{E_n\}$ 是 Ω 中一列两两互不相交的可测集，$f(\omega)$ 为 Bochner 可积函数，则

$$\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} f(\omega) \mathrm{d}P = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f(\omega) \mathrm{d}P$$

这里的和式表示强收敛意义下的极限.

定理 **1.2.8** 设 X, Y 是 Banach 空间，$T: X \to Y$ 是有界线性算子，$f: \Omega \to X$ 为 Bochner 可积函数，则 Tf 可积，并且

$$T\left(\int_E f(\omega) \mathrm{d}P\right) = \int_E T(f(\omega)) \mathrm{d}P, \quad \forall\, E \in \mathscr{F}$$

证明　设 $\{f_n\}$ 是 f 的积分定义中的可数值函数列，则 Tf_n 也是可数值函数列，并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \| Tf_n(\omega) - Tf(\omega) \| \mathrm{d}P$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty} \| T \| \int_\Omega \| f_n(\omega) - f(\omega) \| \mathrm{d}P = 0$$

于是 Tf 可积，并且 $\forall E \in \mathscr{F}$，有

$$\int_E Tf(\omega)\mathrm{d}P = \lim_{n\to\infty}\int_E Tf_n(\omega)\mathrm{d}P$$

$$= \lim_{n\to\infty} T\int_E f_n(\omega)\mathrm{d}P = T\int_E f(\omega)\mathrm{d}P \qquad \Box$$

三、数学期望

现在回头来讨论 Banach 空间值随机变量的数学期望. 根据上一节的定义，随机变量 $f: \Omega \to X$ 是定义在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 之上而取值于 Banach 空间 X 的可测函数，因此根据定理 1.2.4 可定义其数学期望如下：

定义 1.2.3　设 $f: \Omega \to X$ 是 X 值随机变量且 $\int_\Omega \| f(\omega) \| \mathrm{d}P < \infty$，则称 f 在 Ω 上是 Bochner 可积的(在不至于造成混淆的情况下以后简称为可积).

若 $f: \Omega \to X$ 是可积的 X 值随机变量，则称其 Bochner 积分 $\int_\Omega f(\omega)\mathrm{d}P < \infty$ 为 f 的数学期望，记为 $E(f)$.

§1.3　条件数学期望

本节仍然假定 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是完备概率空间，X 是 Banach 空间，并设 $\mathscr{G}$ 是 $\mathscr{F}$ 的子 $\sigma-$代数.

一、条件数学期望的定义

定义 1.3.1　设 $f: \Omega \to X$ 是一个 X 值可积随机变量，$\mathscr{G}$ 是 $\mathscr{F}$ 的子 $\sigma-$代数，如果存在 $\mathscr{G}$ 可测的 X 值可积随机变量 g，使得

$$\int_A f(\omega)\mathrm{d}P = \int_A g(\omega)\mathrm{d}P, \quad \forall A \in \mathscr{G}$$

则称 g 是 f 关于 $\mathscr{G}$ 的条件数学期望(简称条件期望)，并记为

$$g = E(f \mid \mathscr{G})$$

下面考察条件期望的存在性问题，对此有如下结论.

定理 1.3.1　设 $f: \Omega \to X$ 是 X 值可积随机变量，$\mathscr{G}$ 是 $\mathscr{F}$ 的子 $\sigma-$代数，则 $g = E(f \mid \mathscr{G})$ 存在且在几乎处处相等的意义下唯一.

证明　首先证明存在性. 若 $f = \sum_{i=1}^{n} x_i I_{A_i}$ 是简单函数，其中，$x_i \in X$，$A_i \in \mathscr{F}$，$i = 1,2,\cdots,n$，$A_i \cap A_j = \Phi$ $(i \neq j)$，$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$，令 $g = \sum_{i=1}^{n} x_i E(I_{A_i} \mid \mathscr{G})$，则 g 满足定义 1.3.1 中的条件. 此证明了：当 f 为简单函数时，$g = E(f \mid \mathscr{G})$ 存在.

若 f 是任一 X 值可积随机变量，则知存在简单函数序列 $\left\{ f_n = \sum_{i=1}^{k_n} x_n^i I_{A_n^i} \right\}$，使得

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f, \quad \| f_n \| \leqslant 2 \| f \|, \qquad \forall\ n \geqslant 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \| f_n(\omega) - f(\omega) \| \mathrm{d}P = 0$$

令 $g_n = E(f_n \mid \mathscr{G}) = \sum_{i=1}^{k_n} x_n^i E(I_{A_n^i} \mid \mathscr{G})$，则 g_n 关于 $\mathscr{G}$ 可测，$E(\| g_n \|) < \infty$，又

$$f_n - f_m = \sum_{i=1}^{k_n}\sum_{j=1}^{k_m} \left(x_n^i - x_m^j\right) I_{A_n^i \cap A_m^j}$$

$$g_n - g_m = \sum_{i=1}^{k_n}\sum_{j=1}^{k_m}\left(x_n^i - x_m^j\right)E\left(I_{A_n^i\cap A_m^j} \mid \mathscr{Y}\right)$$

所以

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \| g_n(\omega) - g_m(\omega) \| \mathrm{d}P \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{k_n}\sum_{j=1}^{k_m} \| x_n^i - x_m^j \| \int_\Omega E(I_{A_n^i\cap A_m^j} \mid \mathscr{Y})\mathrm{d}P \\
&= \sum_{i=1}^{k_n}\sum_{j=1}^{k_m} \| x_n^i - x_m^j \| P(A_n^i \cap A_m^j) \\
&= \int_\Omega \| f_n(\omega) - f_m(\omega) \| \mathrm{d}P
\end{aligned}$$

因此，$\lim\limits_{n,m\to\infty}\int_\Omega \| g_n(\omega) - g_m(\omega) \| \mathrm{d}P = 0$. 即 $\{g_n\}_{n\geqslant 1}$ 是 L_1 收敛意义下的 Cauchy 序列. 据 $L_1(\Omega, \mathscr{Y}, P; X)$ 的完备性，知存在 $g \in L_1(\Omega, \mathscr{Y}, P; X)$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \| g(\omega) - g_n(\omega) \| \mathrm{d}P = 0$$

由于

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \| f(\omega) - f_n(\omega) \| \mathrm{d}P \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \| g(\omega) - g_n(\omega) \| \mathrm{d}P = 0
\end{aligned}$$

故 $\forall\ A \in \mathscr{Y}$, 有

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\int_A \| f(\omega) - f_n(\omega) \| \mathrm{d}P \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_A \| g(\omega) - g_n(\omega) \| \mathrm{d}P = 0
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
\int_A g(\omega)\mathrm{d}P &= \lim_{n\to\infty}\int_A g_n(\omega)\mathrm{d}P \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_A f_n(\omega)\mathrm{d}P \\
&= \int_A f(\omega)\mathrm{d}P, \qquad \forall\ A \in \mathscr{Y}
\end{aligned}$$

此即证明了条件期望的存在性.

其次证明唯一性. 若还存在 $g' = E(f \mid \mathscr{Y})$，则 $g - g'$ 关于 $\mathscr{Y}$ 可测，且 $\int_\Omega \| g(\omega) - g'(\omega) \| \mathrm{d}P < \infty$. 又对于一切 $A \in \mathscr{Y}$, 有

$$\int_A \left(g(\omega) - g'(\omega)\right)\mathrm{d}P = 0$$

故 $g(\omega) = g'(\omega)$, a.e.. □

二、条件数学期望的基本性质

根据条件期望的定义，很容易验证下面的结论.

定理 1.3.2 设 f_i 是 X 值可积随机变量，C_i 是实数，$i = 1, 2, \cdots, n$, $x \in X$, $\mathscr{Y}$ 是 $\mathscr{F}$ 的子 σ− 代数，则

(i) $E(x \mid \mathscr{Y}) = x$；

(ii) $E(\sum\limits_{i=1}^n C_i f_i \mid \mathscr{Y}) = \sum\limits_{i=1}^n C_i E(f_i \mid \mathscr{Y})$.

定理 1.3.3 设 f 是 X 值可积随机变量，$\mathscr{Y}$ 是 $\mathscr{F}$ 的子 σ− 代数，则

$$\| E(f \mid \mathscr{Y}) \| \leqslant E(\| f \| \mid \mathscr{Y})$$

证明　由于 $\| E(f \mid \mathscr{Y}) \|$ 与 $E(\| f \| \mid \mathscr{Y})$ 均为实值可测函数，只需证明：对任意 $A \in \mathscr{Y}$ 有

$$\int_A \| E(f \mid \mathscr{Y}) \| \mathrm{d}P \leqslant \int_A E(\| f \| \mid \mathscr{Y})\mathrm{d}P = \int_A \| f \| \mathrm{d}P$$

当 $f = \sum\limits_{i=1}^n x_i I_{A_i}$ 为简单函数时，$E(f \mid \mathscr{Y}) = \sum\limits_{i=1}^n x_i E(I_{A_i} \mid \mathscr{Y})$，注意到 $\| f \| = \sum\limits_{i=1}^n \| x_i \| I_{A_i}$，即知上式成立.

设 f 为任意 X 值可积随机变量，由定理 1.1.6，可以取简单函数序列 $\{f_n\}$，使 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$，$\| f_n \| \leqslant 2\| f \|$ $(n \geqslant 1)$. 由控

制收敛定理 1.2.6 得知：$\forall\ A\in\mathscr{Y}$，有

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_A \|f\|\,\mathrm{d}P-\int_A \|f_n\|\,\mathrm{d}P\right| \\
\leqslant&\int_A \Big|\,\|f\|-\|f_n\|\,\Big|\,\mathrm{d}P \\
\leqslant&\int_A \|f-f_n\|\,\mathrm{d}P\to 0,\qquad (n\to\infty)
\end{aligned}
$$

根据定理 1.3.1 的证明知

$$\lim_{n\to\infty}\int_A \|E(f_n\mid\mathscr{Y})-E(f\mid\mathscr{Y})\|\,\mathrm{d}P=0$$

所以，$\forall\ A\in\mathscr{Y}$，有

$$
\begin{aligned}
&\int_A \|E(f\mid\mathscr{Y})\|\,\mathrm{d}P \\
\leqslant&\lim_{n\to\infty}\Big[\int_A \|E(f_n\mid\mathscr{Y})-E(f\mid\mathscr{Y})\|\,\mathrm{d}P+ \\
&\int_A \|E(f_n\mid\mathscr{Y})\|\,\mathrm{d}P\Big] \\
=&\lim_{n\to\infty}\int_A \|E(f_n\mid\mathscr{Y})\|\,\mathrm{d}P \\
\leqslant&\lim_{n\to\infty}\int_A \|f_n\|\,\mathrm{d}P=\int_A \|f\|\,\mathrm{d}P
\end{aligned}
$$

□

定理1.3.4 设 f 是 X 值可积随机变量，$\mathscr{Y}_1$，$\mathscr{Y}_2$ 皆为 $\mathscr{F}$ 的子 σ—代数，且 $\mathscr{Y}_1\subset\mathscr{Y}_2$，则

$$E(E(f\mid\mathscr{Y}_2)\mid\mathscr{Y}_1)=E(E(f\mid\mathscr{Y}_1)\mid\mathscr{Y}_2)=E(f\mid\mathscr{Y}_1)$$

证明　由条件期望的定义立即知第二个等号成立. 因为 $E(f\mid\mathscr{Y}_1)$ 是 $\mathscr{Y}_1$ 可测的，又 $\forall\ A\in\mathscr{Y}_1\subset\mathscr{Y}_2$，有

$$\int_A E(f\mid\mathscr{Y}_1)\mathrm{d}P=\int_A f\mathrm{d}P=\int_A E(f\mid\mathscr{Y}_2)\mathrm{d}P$$

由条件期望的定义知

$$E(E(f\mid\mathscr{Y}_2)\mid\mathscr{Y}_1)=E(f\mid\mathscr{Y}_1)$$

□

条件数学期望也有如下的控制收敛定理.

定理 1.3.5 设 f_n，$n\geqslant 1$ 是 X 值可积随机变量序列，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$，$g$ 是 X 值可积随机变量且 $\|f_n\|\leqslant\|g\|$，$n\geqslant 1$，$\mathscr{Y}$ 是 $\mathscr{F}$ 的子 σ—代数，则

$$\lim_{n\to\infty}E(f_n\mid\mathscr{Y})=E(f\mid\mathscr{Y})$$

证明　首先注意 $\|f\|\leqslant\|g\|$，$\|f_n-f\|\leqslant 2\|g\|$，利用实值随机变量情况下条件期望的控制收敛定理及定理 1.3.2，有

$$
\begin{aligned}
&\|E(f_n\mid\mathscr{Y})-E(f_m\mid\mathscr{Y})\| \\
=&\|E((f_n-f_m)\mid\mathscr{Y})\| \\
\leqslant&E(\|f_n-f_m\|\mid\mathscr{Y})\| \\
\leqslant&E(\|f_n-f\|\mid\mathscr{Y})+E(\|f_m-f\|\mid\mathscr{Y})\to 0 \\
&(n,m\to\infty)
\end{aligned}
$$

由 X 的完备性知存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}E(f_n\mid\mathscr{Y})$，对每一个 $n\geqslant 1$，$E(f_n\mid\mathscr{Y})$ 关于 $\mathscr{Y}$ 可测，故 $\lim\limits_{n\to\infty}E(f_n\mid\mathscr{Y})$ 关于 $\mathscr{Y}$ 可测，下面证明：$\forall A\in\mathscr{Y}$，有

$$\int_A \lim_{n\to\infty}E\big(f_n\mid\mathscr{Y}\big)\,\mathrm{d}P=\int_A f\mathrm{d}P$$

事实上，

$$\|E(f_n\mid\mathscr{Y})\|\leqslant E\big(\|f_n\|\mid\mathscr{Y}\big)\leqslant E\big(\|g\|\mid\mathscr{Y}\big)$$

且

$$\int_\Omega E\big(\|g\|\mid\mathscr{Y}\big)\mathrm{d}P=\int_\Omega \|g\|\,\mathrm{d}P<\infty$$

于是

$$
\begin{aligned}
\int_A \lim_{n\to\infty}E(f_n\mid\mathscr{Y})\,\mathrm{d}P&=\lim_{n\to\infty}\int_A E(f_n\mid\mathscr{Y})\mathrm{d}P \\
&=\lim_{n\to\infty}\int_A f_n\mathrm{d}P=\int_A \lim_{n\to\infty}f_n\mathrm{d}P=\int_A f\mathrm{d}P
\end{aligned}
$$

□

§1.4 随机停时

停时是概率论中的一个重要概念，作为一种特殊的随机变量，根据其取值的不同，分为连续停时和离散停时两类. 由于本书只限于讨论离散参数的鞅过程，因此只介绍离散停时.

定义 1.4.1 设 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是完备概率空间，$\{\mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 是 $\mathscr{F}$ 的递增子 σ－代数序列，随机变量 $\tau: \Omega \to N \cup \{\infty\}$ 称为是一个停时，若对于任何 $n \geqslant 1$，$\{\omega: \tau(\omega) \leqslant n\} \in \mathscr{F}_n$. 当 $P(\tau(\omega) = \infty) = 0$ 时，称 τ 为有限停时；当 $\sup\limits_{\omega \in \Omega} \tau(\omega) < \infty$ 时，称 τ 为有界停时，有界停时全体记为 T.

有时称递增 σ－代数序列 $\{\mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 为一个随机基. 由于 $\{\mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 是递增的，定义中的 $\{\omega: \tau(\omega) \leqslant n\} \in \mathscr{F}_n$ 可以等价地换为 $\{\omega: \tau(\omega) = n\} \in \mathscr{F}_n$. 此外，若规定 $\tau \leqslant \sigma$ 当且仅当 $\tau(\omega) \leqslant \sigma(\omega)$，$a.e.$，则"$\leqslant$"是 T 或全体停时集合上的半序，从而使之成为定向集.

下面是关于停时的一些基本性质.

定理 1.4.1 设 $\{\mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 是随机基，则

(i) $\tau(\omega) \equiv k$ 是停时；

(ii) τ, σ 是停时，则 $\tau \wedge \sigma$, $\tau \vee \sigma$, $\tau + \sigma$ 是停时；

(iii) τ_k 是停时 $(k \geqslant 1)$，则 $\sup\limits_{k \geqslant 1} \tau_k$, $\inf\limits_{k \geqslant 1} \tau_k$ 是停时.

证明 (i) 由于 $\tau(\omega) \equiv k$，故

$$\left\{\omega: \tau(\omega) = n\right\} = \begin{cases} \Phi, & n \neq k \\ \Omega, & n = k \end{cases}$$

于是 $\left\{\omega: \tau(\omega) = n\right\} \in \mathscr{F}_n$, $(n \geqslant 1)$，从而 $\tau(\omega) \equiv k$ 为停时.

(ii) 因为

$$\left\{\tau \wedge \sigma \leqslant n\right\} = \left\{\tau \leqslant n\right\} \cup \left\{\sigma \leqslant n\right\} \in \mathscr{F}_n$$

$$\left\{\tau \vee \sigma \leqslant n\right\} = \left\{\tau \leqslant n\right\} \cap \left\{\sigma \leqslant n\right\} \in \mathscr{F}_n$$

$$\left\{\tau + \sigma \leqslant n\right\} = \bigcup_{i=1}^{n-1} \left(\left\{\tau = i\right\} \cap \left\{\sigma = n - i\right\}\right) \in \mathscr{F}_n$$

故 $\tau \wedge \sigma$, $\tau \vee \sigma$, $\tau + \sigma$ 都是停时.

(iii) 由于

$$\left\{\sup_{k \geqslant 1} \tau_k \leqslant n\right\} = \bigcap_{k \geqslant 1} \left\{\tau_k \leqslant n\right\} \in \mathscr{F}_n$$

$$\left\{\inf_{k \geqslant 1} \tau_k \leqslant n\right\} = \bigcup_{k \geqslant 1} \left\{\tau_k \leqslant n\right\} \in \mathscr{F}_n$$

故 $\sup\limits_{k \geqslant 1} \tau_k$, $\inf\limits_{k \geqslant 1} \tau_k$ 都是停时. □

定义 1.4.2 设 τ 是停时，称

$$\mathscr{F}_\tau = \{A: A \in \mathscr{F}, A \cap \{\tau = n\} \in \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$$

是与 τ 相应的 σ－代数.

注*：直接验证可知 $\mathscr{F}_\tau$ 确为 σ－代数，而 $\tau(\omega)$ 是 $\mathscr{F}_\tau$ 可测的.

定理 1.4.2 设 τ, σ 为停时

(i) 若 $\tau \leqslant \sigma$，则 $\mathscr{F}_\tau \subset \mathscr{F}_\sigma$；

(ii) $\{\tau = \sigma\}$, $\{\tau < \sigma\}$, $\{\tau \leqslant \sigma\}$ 均同时属于 $\mathscr{F}_\tau$ 和 $\mathscr{F}_\sigma$；

(iii) 若 $A \in \mathscr{F}_\tau$，则 $\tau_A = \tau I_A + \infty I_{A^c}$ 是停时.

证明 (i) $\forall A \in \mathscr{F}_\tau$, $n \geqslant 1$，则

$$A \cap \left\{\tau \leqslant n\right\} \in \mathscr{F}_n$$

因为 $\tau \leqslant \sigma$，于是

$$A \cap \left\{\sigma \leqslant n\right\} = A \cap \left\{\sigma \leqslant n\right\} \cap \left\{\tau \leqslant n\right\} \in \mathscr{F}_n$$

所以 $A \in \mathscr{F}_\sigma$，即 $\mathscr{F}_\tau \subset \mathscr{F}_\sigma$.

(ii) 有

$$\left\{\tau = \sigma\right\} \cap \left\{\tau = n\right\} = \left\{\sigma = n\right\} \cap \left\{\tau = n\right\} \in \mathscr{F}_n \tag{1.4.1}$$

$$\{\tau<\sigma\}\cap\{\tau=n\}=\{\sigma>n\}\cap\{\tau=n\}$$
$$=\{\sigma\leqslant n\}^c\cap\{\tau=n\}\in\mathscr{F}_n \tag{1.4.2}$$

$$\{\tau<\sigma\}\cap\{\sigma=n\}=\{\tau<n\}\cap\{\sigma=n\}\in\mathscr{F}_n \tag{1.4.3}$$

$$\{\tau\leqslant\sigma\}=\{\tau<\sigma\}\cup\{\tau=\sigma\} \tag{1.4.4}$$

(1.4.1)式说明 $\{\tau=\sigma\}\in\mathscr{F}_\tau$，将 $\{\tau=n\}$ 换成 $\{\sigma=n\}$ 则 $\{\tau=\sigma\}\in\mathscr{F}_\sigma$；(1.4.2)式说明 $\{\tau<\sigma\}\in\mathscr{F}_\tau$；(1.4.3)式说明 $\{\tau<\sigma\}\in\mathscr{F}_\sigma$；(1.4.4)式说明 $\{\tau\leqslant\sigma\}\in\mathscr{F}_\tau\cap\mathscr{F}_\sigma$. □

定理 1.4.3 设 $\{\mathscr{F}_n, n\geqslant 1\}$ 是随机基，$(f_n, \mathscr{F}_n, n\geqslant 1)$ 是适应随机过程，$\tau\in T$ 是有界停时，则 $f_\tau(\omega)=f_{\tau(\omega)}(\omega)$ 是关于 $\mathscr{F}_\tau$ 可测的函数. 若此时令 $\mathscr{F}_\infty=\sigma(\bigcup_{n\in N}\mathscr{F}_n)$，$f_\infty$ 是 $\mathscr{F}_\infty$ 可测的任意函数，则上述 τ 可以是任意停时.

证明　事实上，

$$f_\tau(\omega)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(\omega)I_{\{\tau=n\}}+f_\infty(\omega)I_{\{\tau=\infty\}}$$

对于 X 中的任意一个开集 B，有

$$\{\omega: f_\tau(\omega)\in B\}\cap\{\tau=n\}=\{\omega: f_n(\omega)\in B\}\in\mathscr{F}_n$$
$$\{\omega: f_\tau(\omega)\in B\}\cap\{\tau=\infty\}=\{\omega: f_\infty(\omega)\in B\}\in\mathscr{F}_\infty$$

于是 $\{\omega: f_\tau(\omega)\in B\}\in\mathscr{F}_\tau$，即 f_τ 关于 $\mathscr{F}_\tau$ 可测. □

下面的结论，在构造停时时经常被用到.

定理 1.4.4 设 B 是 X 中的 Borel 集，$(f_n, \mathscr{F}_n, n\geqslant 1)$ 是适应随机过程，令 $\tau(\omega)=\inf\{n: f_n(\omega)\in B\}$，$\inf\Phi\triangleq\infty$，则 τ 是停时.

证明　实际上，有

$$\{\tau=n\}=\{\omega: f_n(\omega)\in B\}\setminus\bigcup_{i=1}^{n-1}\{\omega: f_i(\omega)\overline{\in} B\}$$
$$\in\mathscr{F}_n,\ (n\geqslant 1)$$
$$\{\tau=\infty\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{\omega: f_n(\omega)\overline{\in} B\}$$

故 τ 为停时. □

第二章　Banach 空间值鞅及其基本性质

概率论，特别是其中的鞅论与泛函分析和调和分析的联系是随机过程理论发展中特别富有意义的一个部分，其影响既深且广，其发展势头经久不衰．自 20 世纪 70 年代中期以来，国际上一些著名的概率学家与分析学家如 Pisier、Burkholder、Bourgain、Edgar、Herz 等人又将有关的研究置于无穷维值空间的框架之下，研究取值于一般 Banach 空间的随机过程的概率性质与调和函数的分析性质，它涉及到值空间的结构性质与几何性质，从而将随机过程理论、向量值调和分析与 Banach 空间几何学的研究有机地结合起来，开辟了称之为“Banach 空间上概率论与调和分析”的新研究领域，得到了对于概率论、调和分析和 Banach 空间几何学三个方面都有深刻影响的结果，发展了经典概率论、经典调和分析和经典 Banach 空间理论．事实证明，这一领域不仅与多种学科分支有着广泛而且深远的联系，例如，鞅不等式与空间理论，随机过程的极限理论，奇异积分算子理论，Banach 空间的局部理论，逼近论，向量值调和函数的边值问题等，而且在其发展过程中产生了新的思想方法和新的研究方向，如向量值鞅变换与 UMD 空间，向量值独立增量过程的极限理论与 Banach 空间的型以及在这一理论中十分重要的等周不等式方法，弱 Hilbert 空间等等．有关内容的研究成为国际上这一领域的热门课题．

本章将讨论 Banach 空间值的鞅理论，介绍有关 Banach 空间值鞅的一些最基本的概念和性质．不过，很快将会看到有关鞅的这些基本性质都与其所取值的 Banach 空间的某些性质紧密相联．

具体地说，鞅的收敛性与 Banach 空间的 Radom－Nikodym 性质有密切联系；鞅的大数定律与 Banach 空间的 p 型和 q 余型性质有密切联系；而鞅的不等式与 Banach 空间的凸性和光滑性有密切联系．正是因为鞅与 Banach 空间之间的这种内在联系，使得 Banach 空间值鞅理论并非仅仅是实值鞅论一般意义上的扩展，而是具有其重要的独立研究价值．鞅这一概念，在本书中具有双重的身份．一方面，从概率论的角度出发，作为抽象空间中的概率论的一个分支，鞅是我们的研究对象；另一方面，从分析数学（特别是其中的泛函分析和调和分析）的角度出发，鞅（或称鞅方法）又是研究分析数学问题的一种有力工具．

§2.1　基本概念和基本性质

定义2.1.1　设 $f=\{f_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 是 X 值可积适应随机变量序列，称 f 为 X 值鞅，如果

$$E(f_{n+1}\mid\mathscr{F}_n)=f_n,\qquad\forall\, n\geqslant 1$$

例 1　设 $f\in L_1(\Omega,\mathscr{F},P;X)$，$\{\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 是 $\mathscr{F}$ 的单调上升的子 σ－代数序列，令

$$f_n=E(f\mid\mathscr{F}_n),\qquad\forall\, n\geqslant 1$$

则显然 $\{f_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 是 X 值鞅．

例 2　设 $\{\xi_n,n\geqslant 1\}$ 是相互独立的数学期望为零的 X 值随机变量，令

$$f_n=\sum_{i=1}^{n}a_i\xi_i,\qquad\mathscr{F}_n=\sigma(\{\xi_i,1\leqslant i\leqslant n\})$$

则 $\{f_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 是鞅．事实上，$\forall\, n\geqslant 1$ 有

$$\begin{aligned}E(f_{n+1}\mid\mathscr{F}_n)&=f_n+a_{n+1}E(\xi_{n+1}\mid\mathscr{F}_n)\\&=f_n+a_{n+1}E(\xi_{n+1})=f_n\end{aligned}$$

例 3　设 $\Omega=[0,1)$，$\mathscr{F}$ 为 Ω 中一切 Borel 子集全体，P 为 $\mathscr{F}$ 上的 Lebesgue 测度，则 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间．设 $\{x_n,n\geqslant 1\}$

是 Banach 空间 X 中任意一个序列，令

$$f_0 = x_0 I_{[0,1)}$$
$$f_1 = (x_0 - x_1) I_{[0,\frac{1}{2})} + (x_0 + x_1) I_{[\frac{1}{2},1)}$$
$$f_2 = (x_0 - x_1 - x_2) I_{[0,\frac{1}{4})} + (x_0 - x_1 + x_2) I_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2})} + (x_0 + x_1 - x_2) I_{[\frac{1}{2},\frac{3}{4})} + (x_0 + x_1 + x_2) I_{[\frac{3}{4},1)}$$
$$\cdots\cdots$$

再令 $\mathscr{F}_n = \sigma(f_0, f_1, \cdots, f_n)$，$n \geqslant 1$，则 $\{f_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 是 X 值鞅.

定理 2.1.1 设 $f = \{f_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 是 X 值鞅，对于任何有界停时 τ、$\sigma \in T$，$\sigma \leqslant \tau$，则

(i) $\{\| f_n \|, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 为非负实值下鞅；

(ii) $E(f_\tau \mid \mathscr{F}_\sigma) = f_\sigma$；

(iii) $\forall A \in \mathscr{F}_\sigma$，有 $\int_A \| f_\sigma \| \mathrm{d}P \leqslant \int_A \| f_\tau \| \mathrm{d}P$.

证明 (i) $\forall m, n \in \mathbf{N}$，$m \geqslant n$，由鞅性质，则

$$E(f_m \mid \mathscr{F}_n) = f_n$$

故

$$E(\| f_m \| \mid \mathscr{F}_n) \geqslant \| E(f_m \mid \mathscr{F}_n) \| = \| f_n \|$$

即 $\{\| f_n \|, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 为非负实值下鞅.

(ii) 对于有界停时 τ、$\sigma \in T$，不妨取 $m \geqslant \max\{\tau, \sigma\}$，对于每一个 $A \in \mathscr{F}_\sigma$，由于 $\mathscr{F}_\sigma \subset \mathscr{F}_\tau$，所以 $A \in \mathscr{F}_\tau$. 对于每一个 $n \geqslant 1$，

$$A \cap \{\sigma = n\} \in \mathscr{F}_n,\ A \cap \{\tau = n\} \in \mathscr{F}_n$$

从而

$$\begin{aligned}\int_A f_\sigma \mathrm{d}P &= \sum_{n=1}^{m} \int_{A \cap \{\sigma = n\}} f_n \mathrm{d}P \\ &= \sum_{n=1}^{m} \int_{A \cap \{\sigma = n\}} f_m \mathrm{d}P \\ &= \int_A f_m \mathrm{d}P\end{aligned}$$

类似地 $\int_A f_\tau \mathrm{d}P = \int_A f_m \mathrm{d}P$，故

$$\int_A f_\sigma \mathrm{d}P = \int_A f_\tau \mathrm{d}P, \qquad \forall A \in \mathscr{F}_\sigma$$

即 $E(f_\tau \mid \mathscr{F}_\sigma) = f_\sigma$. □

下面讨论 X 值鞅的极大函数的弱 (1,1) 型不等式，为此，首先给出一个引理.

引理 2.1.2 设 $\{f_n, n \geqslant 1\}$ 是 X 值随机变量序列，T 为有界停时全体，若 $\sup_{\tau \in T} E \| f_\tau \| < \infty$，则 $\forall \lambda > 0$，有

$$P\{\sup_{n \geqslant 1} \| f_n \| > \lambda\} \leqslant \frac{1}{\lambda} \sup_{\tau \in T} E \| f_\tau \| < \infty$$

证明 对于每一个固定的 $m \in \mathbf{N}$，令

$$A_m = \{\omega: \sup_{n \leqslant m} \| f_n \| > \lambda\}$$

定义停时 σ 如下：

$$\sigma(\omega) = \begin{cases} \min\begin{Bmatrix} n \in \mathbf{N}: n \leqslant m \\ \| f_n(\omega) \| > \lambda \end{Bmatrix}, & \text{若 } \omega \in A_m \\ m, & \text{否则} \end{cases}$$

则 $\sigma \in T$，且

$$\begin{aligned}\lambda P(A_m) &\leqslant \int_{A_m} \| f_\sigma \| \mathrm{d}P \\ &\leqslant E \| f_\sigma \| \\ &\leqslant \sup_{\tau \in T} E \| f_\tau \| < \infty\end{aligned}$$

上式中，令 $m \to \infty$，则结论得证. □

特别地，对于鞅有如下更强的结果.

定理 2.1.3 设 $f = \{f_n\}_{n \geqslant 1}$ 是 X 值鞅，则 $\forall \lambda > 0$，有

$$P\left\{\sup_{n \geqslant 1} \| f_n \| > \lambda\right\} \leqslant \frac{1}{\lambda} \sup_{n \geqslant 1} E \| f_n \|$$

证明 由定理 2.1.1 的(iii)知：对任一有界停时 $\tau \in T$，有

$$E \| f_\tau \| = \int_\Omega \| f_\tau \| \mathrm{d}P$$

$$\leqslant \int_\Omega \| f_{\max\tau} \| \, \mathrm{d}P$$

$$\leqslant \sup_{n\geqslant 1} E\| f_n \|$$

再由引理 2.1.2 便得

$$P\left\{\sup_{n\geqslant 1} \| f_n \| > \lambda\right\} \leqslant \frac{1}{\lambda} \sup_{\tau\in T} E\| f_\tau \|$$

$$\leqslant \frac{1}{\lambda} \sup_{n\geqslant 1} E\| f_n \| \qquad \square$$

对于正则鞅(即如例 1 中所给出的鞅)则有如下结论.

定理 2.1.4 若 $f_n = E(f \mid \mathscr{F}_n)$，$n\geqslant 1$，其中 $f\in L_1(\Omega, \mathscr{F}, P; X)$，则 $\forall \lambda > 0$，有

$$P\left\{\sup_{n\geqslant 1} \| f_n \| > \lambda\right\} \leqslant \frac{1}{\lambda} E\| f \|$$

证明 由于 $\forall n \geqslant 1$，有

$$E\| f_n \| = \int_\Omega \| E(f \mid \mathscr{F}_n) \| \, \mathrm{d}P$$

$$\leqslant \int_\Omega \| f \| \, \mathrm{d}P = E\| f \|$$

故结论成立. $\square$

根据以上几个不等式,立即可以得到以下关于 X 值鞅收敛性的几个简单结论.

定理 2.1.5 设 $f = \{f_n\}_{n\geqslant 1}$ 是 X 值鞅，若 $f_n \xrightarrow{L_1} f_\infty$，则 $f_n \to f_\infty$，$a.e.$.

证明 由于 $f_n \xrightarrow{L_1} f_\infty$，则 $\forall \varepsilon > 0$，$\delta > 0$，存在 $n_0 \in \mathbf{N}$，使得当 $m, n \geqslant n_0$ 时，$\| f_n - f_m \|_{L_1} < \varepsilon\delta$.

对于固定的 $m \geqslant n_0$，则 $\{f_n - f_m, \mathscr{F}_n, m \geqslant n\}$ 亦是 X 值鞅. 由定理 2.1.3 知

$$P\left\{\sup_{n\geqslant m} \| f_n - f_m \| > \varepsilon\right\} \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \sup_{n\geqslant m} E\| f_n - f_m \|_{L_1} < \delta$$

这说明 $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ 是几乎处处一致收敛的 Cauchy 序列，从而 $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ 是几乎处处收敛的. 又序列几乎处处收敛的极限与 L_1 收敛的极限是一致的，故 $f_n \to f_\infty$，$a.e.$. $\square$

下面的定理是实值情况的 P. Lèvy 连续性定理在 Banach 空间值情况的一种推广.

定理 2.1.6 设 $f \in L_p(\Omega, \mathscr{F}, P; X)$ $(1 \leqslant p < \infty)$，$\{\mathscr{F}_n\}_{n\geqslant 1}$ 是 $\mathscr{F}$ 的递增子 $\sigma-$代数序列，则鞅 $\{f_n = E(f \mid \mathscr{F}_n), \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 在 L_p 中收敛于 $E(f \mid \mathscr{F}_\infty)$，且几乎处处收敛于 $E(f \mid \mathscr{F}_\infty)$，其中 $\mathscr{F}_\infty = \sigma(\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathscr{F}_n)$.

证明 因为 $f_n = E(f \mid \mathscr{F}_n) = E(E(f \mid \mathscr{F}_\infty) \mid \mathscr{F}_n)$，$\forall n \geqslant 1$

并且

$$E(f \mid \mathscr{F}_\infty) \in L_p(\Omega, \mathscr{F}_\infty, P; X),$$

所以，要证 $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ 在 L_p 中收敛且几乎处处收敛于 $E(f \mid \mathscr{F}_\infty)$，只要证明：对于任意 $f \in L_p(\Omega, \mathscr{F}_\infty, P; X)$，分别有

$$E(f \mid \mathscr{F}_n) \xrightarrow{L_p} f, \qquad \text{且 } E(f \mid \mathscr{F}_n) \xrightarrow{a.e.} f$$

设 $f \in L_p(\Omega, \mathscr{F}_\infty, P; X)$，由于 $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathscr{F}_n$ 简单函数在 $L_p(\Omega, \mathscr{F}_\infty, P; X)$ 中稠密，故 $\forall \varepsilon > 0$，可选取 $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathscr{F}_n$ 简单函数 f' 使得 $\| f - f' \|_{L_p} < \frac{\varepsilon}{2}$. 由于 f' 为简单函数，故存在 n_0，当 $n \geqslant n_0$ 时，f' 是 $\mathscr{F}_n$ 可测的. 这样一来，对一切 $n \geqslant n_0$，利用条件期望的 Jensen 不等式有

$$\| f_n - f \|_{L_p} \leqslant \| f_n - f' \|_{L_p} + \| f - f' \|_{L_p}$$

$$= \| E(f \mid \mathscr{F}_n) - E(f' \mid \mathscr{F}_n) \|_{L_p} + \| f - f' \|_{L_p}$$

$$\leqslant 2\| f - f' \|_{L_p} < \frac{\varepsilon}{2}$$

即 $f_n = E(f \mid \mathscr{F}_n) \xrightarrow{L_p} f$. 再由定理 2.1.5 即知 $f_n = E(f \mid \mathscr{F}_n) \xrightarrow{a.e.} f$.

§ 2.2 Banach 空间的 Radom－Nikodym 性质与鞅的收敛性

对于实值鞅来说，著名的 Doob 收敛定理指出：$L_1(R)$ 有界鞅必几乎处处收敛．但是下面的例子说明，对于 Banach 空间值鞅，一般来说，这个结果不再成立．

例 1 令 $X = C_0 = \{\{a_n\} \subset R;\ a_n \to 0\ (n \to \infty)\}$，赋予 C_0 上确界范数拓扑，则 C_0 是 Banach 空间．设 $\{\varepsilon_i\}$ 为 Bernoulli 序列，$\{e_n\}$ 为 C_0 中通常使用的基底．若 $\{b_n\}$ 为任意一实数序列，令 $f_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \varepsilon_k(\omega) e_k$，$\mathscr{F}_n = \sigma(f_1, f_2, \cdots, f_n)$；$n \geqslant 1$．显然 $f = \{f_n\}_{n\geqslant 1}$ 为一 X 值鞅．容易验证，$f = \{f_n\}_{n\geqslant 1}$ 为一 $L_1(X)$ 有界鞅的充分必要条件是 $\sup_n |b_n| < \infty$；而 $\lim_{n\to\infty} f_n(\omega)$ $a.e.$ 存在的充分必要条件是 $b_n \to 0\ (n \to \infty)$．若取 $\{a_n\}$ 使得 $\sup_n |b_n| < \infty$ 但 $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$，则 $L_1(X)$ 中有界鞅 $f = \{f_n\}_{n\geqslant 1}$ 并不几乎处处收敛．

那么，究竟在什么条件下才能得到 Banach 空间值鞅的几乎处处收敛性呢？解决此问题的方案无非有两种：一种是增强对鞅本身的概率条件要求(即如定理 2.1.5 和定理 2.1.6)，这将给以后的应用带来较大的局限性；另一种就只能是对鞅所取值的 Banach 空间提出新的要求．本节将研究 Doob 关于上述结果的有关问题．特别地，将证明对 X 值鞅上述 Doob 结果成立的充分必要条件是 Banach 空间 X 具有所谓的 Radom-Nikodym 性质．这个结果的意义不仅仅在于寻找到 Doob 收敛定理成立的条件，而且更有价值的是揭示了鞅与 Banach 空间的 Radom-Nikodym 性质之间深刻的内在联系．为此，先介绍一点所需要的有关向量值测

度的基本事实．这里将仅仅列举所需基本结论，其详细内容可参见 1977 年 Diestel 和 Uhl 的专著《Vector Measures》．

若 $\mathscr{F}$ 是集合 Ω 的子集合组成的一个代数，F 是定义在 $\mathscr{F}$ 上取值于 Banach 空间 X 的集值函数，如果对任意的 $A_1, A_2 \in \mathscr{F}$，$A_1 \cap A_2 = \varnothing$，有 $F(A_1 \cup A_2) = F(A_1) + F(A_2)$，则称 F 是 $\mathscr{F} \to X$ 的有限可加向量值测度．如果对 $A_n \in \mathscr{F}$，$n \geqslant 1$，$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$，$A_n \cap A_m = \varnothing(n \neq m)$，都有 $F(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} F(A_n)$，则称 F 是 $\mathscr{F} \to X$ 的 σ－可加的向量值测度．

若 F 是定义在代数 $\mathscr{F}$ 上取值于 X 的有限可加向量值测度，则 F 的变差定义为 $\mathscr{F} \to [0,\infty)$ 的函数：

$$|F|(A) = \sup\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \|F(A_k)\|;\ n \geqslant 1,\ A \supset A_k \in \mathscr{F},\ A_i \cap A_j = \varnothing(i \neq j)\right\}$$
$$\forall A \in \mathscr{F}$$

如果 $|F|(\Omega) < \infty$，则称 F 是有有限变差的．若 γ 是定义在 $\mathscr{F}$ 上的有限非负实值测度，$\lim_{\gamma(A)\to 0} F(A) = 0$，则称 F 是 γ－连续的，记为 $F \ll \gamma$.

若对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $A \in \mathscr{F}$，使

$$|F|(\Omega \backslash A) + \gamma(A) \leqslant \varepsilon$$

则称 $|F|$ 是 γ－奇异的，记为 $|F| \perp \gamma$.

定义 2.2.1 若对每一概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 和每一个 $\mathscr{F} \to X$ 的 σ－可加，具有有界变差，P－连续的向量值测度 F 都存在 $f \in L_1(\Omega, \mathscr{F}, P;\ X)$，使

$$F(A) = \int_A f(\omega)\mathrm{d}P, \qquad \forall A \in \mathscr{F}$$

则称 Banach 空间 X 具有 Radom－Nikodym 性质，简称 X 具有 RNP. 此时，称 $f(\omega)$ 为 F 的 R－N 导数，记为 $F = f \cdot P$ 或 $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}P} = f$.

事实上，在上述定义中任意的概率空间可以只取 $([0,1],\mathscr{B}[0,1],P)$ 其中 P 为 $[0,1]$ 上的 Lebesgue 测度. 由经典的 Radom－Nikodym 定理可知，实数空间 $\mathbf{R}$ 具有 RNP. 可以证明，每一个自反 Banach 空间(特别是 Hilbert 空间)和可分共轭空间(例如 l_1)都具有 RNP，而 $L_1([0,1])$，$C[0,1]$，C_0 等不具有 RNP.

下面考察由鞅诱导的向量值测度. 若 $f=\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ 是 X 值鞅，则对任意 $A\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_n$，则必存在某个 $n_0\in\mathbf{N}$，使得 $A\in\mathscr{F}_{n_0}$，则当 $n\geqslant n_0$ 时，由鞅定义知 $E(f_n\mid\mathscr{F}_{n_0})=f_{n_0}$. 换言之，即有

$$\int_A f_n(\omega)\mathrm{d}P=\int_A f_{n_0}(\omega)\mathrm{d}P,\quad \forall\, n\geqslant n_0$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_A f_n(\omega)\mathrm{d}P$ 存在. 于是定义

$$F(A)=\lim_{n\to\infty}\int_A f_n(\omega)\mathrm{d}P,\qquad \forall\, A\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_n$$

则 $F(\cdot)$ 是定义在代数 $\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_n$ 上的 X 值测度，并且

$$F(A)=\int_A f_n(\omega)\mathrm{d}P,\qquad \forall\, A\in\mathscr{F}_n,\ n\geqslant 1$$

这说明任给一个 X 值鞅 $f=\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ 便诱导出一个代数 $\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_n$ 上的 X 值测度 F. F 限制在任何 $\mathscr{F}_n$ 上有 R－N 导数 f_n，容易看出，逆命题也成立. 所以研究这种 X 值测度对于 X 值鞅是很重要的.

定理 2.2.1 设 X 是 Banach 空间，则下列条件相互等价：

(i) X 具有 RNP；

(ii) 对任意概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的一致可积的 X 值鞅 $L_1(X)$ 收敛；

(iii) 对任意概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的一致有界的 X 值鞅 $L_1(X)$ 收敛.

证明 (i)⇒(ii) 设 $f=\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ 是一致可积的 X 值鞅. $\forall\ n\geqslant 1$，令

$$F_n(A)=\int_A f_n(\omega)\mathrm{d}P,\qquad \forall\, A\in\mathscr{F}_\infty$$

由鞅性质及一致可积性，对任意 $A\in\mathscr{F}_\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}F_n(A)$ 存在，故令

$$F(A)=\lim_{n\to\infty}F_n(A),\qquad \forall\, A\in\mathscr{F}_\infty$$

由一致可积性知，F 是可列可加的，有界变差的. 显然 $F\ll P$，因为 X 具有 RNP，于是存在 $f_\infty\in L_1(\Omega,\mathscr{F},P;X)$，使得

$$F(A)=\int_A f_\infty(\omega)\mathrm{d}P,\qquad \forall\, A\in\mathscr{F}_\infty$$

由鞅性质，对每一个 $n\geqslant 1$，任意 $A\in\mathscr{F}_n$，有

$$\int_A f_n(\omega)\mathrm{d}P=F_n(A)=F(A)=\int_A f_\infty(\omega)\mathrm{d}P$$

故 $f_n=E(f_\infty\mid\mathscr{F}_n)$，$\forall\ n\geqslant 1$. 根据定理 2.1.6 知 $f_n\xrightarrow{L_1}f_\infty$.

(ii)⇒(iii) 为显然.

(iii)⇒(i) 首先证明：若(iii)成立，则以向右定向集为指标的任意一致有界鞅亦 L_1 收敛. 事实上，设 $f=\{f_t,\mathscr{F}_t,t\in\triangle\}$ 为任意一致有界的鞅，其中“$\triangle$”为向右定向集. 反设 $f=\{f_t,\mathscr{F}_t,t\in\triangle\}$ 不是 L_1 收敛的，则 $\{f_t,t\in\triangle\}$ 不是 L_1 收敛的 Cauchy 族. 于是，$\exists\,\varepsilon>0$，使得对任意 $t\in\triangle$，存在 $u,v\in\triangle$，$u\geqslant t$，$v\geqslant t$，有 $\|f_u-f_v\|_{L_1}\geqslant 2\varepsilon$，从而必有 $\|f_u-f_t\|_{L_1}\geqslant\varepsilon$ 或 $\|f_v-f_t\|_{L_1}\geqslant\varepsilon$. 反复用此结论可选取 $\{t_n,n\geqslant 1\}\subset\triangle$，使得

$$\|f_{t_{n+1}}-f_{t_n}\|_{L_1}\geqslant\varepsilon$$

而 $\{f_{t_n},\mathscr{F}_{t_n},n\geqslant 1\}$ 为一致有界的 X 值鞅，但在 L_1 中不收敛，这与(iii)矛盾.

下面证明(i)成立. 设 $F:\mathscr{F}\to X$ 是可列可加的，有界变差的，且关于 P 绝对连续的 X 值测度，则知 F 的变差 V_F 是定义在 $\mathscr{F}$ 上完全可加的关于 P 绝对连续的非负有限实值测度. 由经典的 Radom－Nikodym 定理知，存在 $\varphi\in L_1(\Omega,\mathscr{F},P;R)$，使得

$$V_F(A)=\int_A\varphi\mathrm{d}P,\qquad \forall\, A\in\mathscr{F}$$

令

$$\Pi = \left\{ \begin{array}{l} \pi = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\},\ A_1, A_2, \cdots, A_n \text{ 互不相交}, \\ \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k = \Omega, A_k \in \mathscr{F},\ V_F(A_k) > 0,\ 1 \leqslant k \leqslant n,\ n \geqslant 1 \end{array} \right\}$$

Π 中定义半序"$\leqslant$"如下：$\pi_1 \in \Pi$，$\pi_2 \in \Pi$，$\pi_1 \leqslant \pi_2$ 的充分必要条件是"$A \in \pi_2$，则存在 $B \in \pi_1$，使得 $A \subset B$，$a.e.$."则 $\{\Pi, \leqslant\}$ 是向右定向集．令

$$P'(A) = \frac{V_F(A)}{V_F(\Omega)}, \qquad \forall A \in \mathscr{F}$$

则 $(\Omega, \mathscr{F}, P')$ 为概率空间．对任意 $\pi = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\} \in \Pi$，定义

$$f_\pi \triangleq \sum_{A \in \pi} \frac{F(A)}{P'(A)} I_A = V_F(A) \sum_{A \in \pi} \frac{F(A)}{V_F(A)} I_A$$

$$\mathscr{F}_\pi \triangleq \sigma(\pi) = \sigma(A_1, A_2, \cdots, A_n)$$

则 $f = \{f_\pi, \mathscr{F}_\pi, \pi \in \Pi\}$ 是 $(\Omega, \mathscr{F}, P')$ 上的 X 值鞅．由于 $\|F(A)\| \leqslant V_F(A)$，$\forall A \in \mathscr{F}$，故 f 还是一致有界鞅．于是，由前所证知，存在 $f_\infty \in L_1(\Omega, \mathscr{F}, P'; X)$，使得

$$\lim_{\pi \in \Pi} \int_\Omega \| f_\pi - f_\infty \| \mathrm{d}P' = 0$$

从而，$\forall A \in \mathscr{F}$，有

$$\lim_{\pi \in \Pi} \int_A f_\pi \mathrm{d}P' = \int_A f_\infty \mathrm{d}P'$$

令 $\pi_0 = \{A, \Omega - A\} \in \Pi$，注意 $\Pi(\pi_0) = \{\pi \in \Pi, \pi_0 \leqslant \pi\}$ 是 Π 的子向右定向集，因此

$$\lim_{\pi \in \Pi(\pi_0)} \int_A f_\pi \mathrm{d}P' = \int_A f_\infty \mathrm{d}P'$$

由鞅性质和 f_{π_0} 的定义得

$$F(A) = \int_A f_\infty \mathrm{d}P' = \int_A f_\infty \frac{\mathrm{d}V_F}{V_F(\Omega)} = \int_A f_\infty \frac{\varphi}{V_F(\Omega)} \mathrm{d}P$$

由于 $f = \{f_\pi, \mathscr{F}_\pi, \pi \in \Pi\}$ 是一致有界的，故 f_∞ 是几乎处处有界的，从而 $A f_\infty \frac{\varphi}{V_F(\Omega)}$ 是可积的 X 值随机变量，这说明 X 具有 RNP，即(i)成立． □

定理 2.2.2 设 $1 < p < \infty$，X 为 Banach 空间，则下列条件相互等价：

(i) X 具有 RNP；

(ii) 对任意概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的每一个 $L_p(X)$ 有界鞅是 $L_p(X)$ 收敛的．

证明 (ii)⇒(i) 若(ii)成立，则定理 2.2.1 中的(iii)显然成立，由此知 X 具有 RNP.

(i)⇒(ii) 设 $f = \{f_n, \mathscr{F}_n, n \in \mathbf{N}\}$ 为任意概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的有界的 X 值鞅，由于 $p > 1$，L_p 有界性蕴涵一致可积性，即 $\{f_n, n \geqslant 1\}$ 是一致可积的．由定理 2.2.1 知存在 $f_\infty \in L_1(\Omega, \mathscr{F}_\infty, P; X)$ 使得 $f_n \xrightarrow{L_1} f_\infty$，且 $f_n = E(f_\infty \mid \mathscr{F}_n)$．由定理 2.1.6，欲证 $\{f_n, n \geqslant 1\}$ 是 L_p 收敛的，只需证明 f_∞ 是 L_p 可积的．由于 $f_n \xrightarrow{L_1} f_\infty$，则存在子列 $\{n_k, k \in \mathbf{N}\} \subset \mathbf{N}$，使得

$$f_{n_k} \to f_\infty, \quad a.e..$$

由 Fatou 引理得

$$E\| f_\infty \|^p \leqslant \varliminf_{k \to \infty} E\| f_{n_k} \|^p \leqslant \sup_{n \geqslant 1} E\| f_n \|^p < \infty$$

此即证明了 f_∞ 是 L_p 可积的． □

下面讨论本节开始提到的 Doob 鞅收敛定理在 Banach 空间值的情况．

定理 2.2.3 设 X 是 Banach 空间，则下列条件相互等价：

(i) X 具有 RNP；

(ii) 对任意概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的 $L_1(X)$ 有界的 X 值鞅 $f = \{f_n\}_{n \geqslant 1}$，存在一可积的 X 值随机变量 f_∞，使得 $f_n \to f_\infty$，$a.e.$.

证明 (ii)⇒(i) 对任意概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的一致可积的 X 值鞅 $f=\{f_n\}_{n\geqslant 1}$，由于 $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ 是 L_1 有界的，故由(ii)知 $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ 几乎处处收敛，从而 $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ 是 L_1 收敛的. 再由定理 2.2.1 知 X 具有 RNP.

(i)⇒(ii) 设 $f=\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ 为任意一个概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的 L_1 有界 X 值鞅，$\forall \lambda>0$，令

$$\sigma_\lambda=\begin{cases}\min\{n\geqslant 1: \|f_n(\omega)\|>\lambda\}\\ \infty, \quad \sup\limits_{n\geqslant 1}\|f_n(\omega)\|\leqslant\lambda\end{cases}$$

则 σ_λ 是有界停时，当 $\omega\in\{\sigma_\lambda=\infty\}$ 时，则

$$\sup_{n\geqslant 1}\|f_{\sigma_\lambda\wedge n}(\omega)\|\leqslant\lambda$$

而在 $\{\sigma_\lambda<\infty\}$ 上，有

$$\lim_{n\to\infty}\|f_{\sigma_\lambda\wedge n}(\omega)\|=\|f_{\sigma_\lambda}(\omega)\|$$

由 Fatou 引理及定理 2.1.1 有

$$\begin{aligned}\int_{\{\sigma_\lambda<\infty\}}\|f_{\sigma_\lambda}(\omega)\|\mathrm{d}P&\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int_{\{\sigma_\lambda<\infty\}}\|f_{\sigma_\lambda\wedge n}(\omega)\|\mathrm{d}P\\&\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int_\Omega\|f_{\sigma_\lambda\wedge n}(\omega)\|\mathrm{d}P\\&\leqslant\sup_{n\geqslant 1}\int_\Omega\|f_n(\omega)\|\mathrm{d}P\end{aligned}$$

由于在 $\{\sigma_\lambda<\infty\}$ 上，$\|f_{\sigma_\lambda\wedge n}(\omega)\|\leqslant\|f_{\sigma_\lambda}(\omega)\|$，故

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\sup_{n\geqslant 1}\|f_{\sigma_\lambda\wedge n}\|\mathrm{d}P\\&=\int_{\{\sigma_\lambda=\infty\}}\sup_{n\geqslant 1}\|f_{\sigma_\lambda\wedge n}\|\mathrm{d}P+\int_{\{\sigma_\lambda<\infty\}}\sup_{n\geqslant 1}\|f_{\sigma_\lambda\wedge n}\|\mathrm{d}P\\&\leqslant\lambda+\int_{\{\sigma_\lambda<\infty\}}\sup_{n\geqslant 1}\|f_{\sigma_\lambda}\|\mathrm{d}P\\&\leqslant\lambda+\sup_{n\geqslant 1}\int_\Omega\|f_n\|\mathrm{d}P<\infty\end{aligned}$$

由定理 2.1.1 知 $\{f_{\sigma_\lambda\wedge n}, \mathscr{F}_{\sigma_\lambda\wedge n}, n\geqslant 1\}$ 是 X 值鞅. 令

$$A_\lambda\triangleq\bigcup_{n\geqslant 1}\{f_n\neq f_{\sigma_\lambda\wedge n}\}$$

根据引理 2.1.2 知

$$\begin{aligned}P(A_\lambda)&=P(\bigcup_{n\geqslant 1}\{f_n\neq f_{\sigma_\lambda\wedge n}\})\\&\leqslant P(\sup_{n\geqslant 1}\|f_n\|>\lambda)\\&\leqslant\frac{1}{\lambda}\sup_{n\geqslant 1}E(\|f_n\|)\to 0, \qquad (\lambda\to\infty)\end{aligned}$$

而 $\{f_{\sigma_\lambda\wedge n}\}$ 与 $\{f_n\}$ 在集合 A_λ^c 上是完全相同的. 但 $\{f_{\sigma_\lambda\wedge n}, n\geqslant 1\}$ 一致可积，由定理 2.2.1 知 $\{f_{\sigma_\lambda\wedge n}, n\geqslant 1\}$ L_1 收敛. 再由定理 2.1.5 知 $\{f_{\sigma_\lambda\wedge n}, n\geqslant 1\}$ 几乎处处收敛于其 L_1 极限. 换言之，在集合 A_λ^c 上 $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ 几乎处处收敛. 由于 $P(A_\lambda)\to 0$ $(\lambda\to\infty)$，故 $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ 几乎处处收敛. 设其几乎处处收敛的极限为 f_∞，由 Fatou 引理知 f_∞ 是可积的. □

§2.3 独立变量序列的大数定律与 Banach空间的型

极限理论是概率论中十分重要的基本内容之一，但是经典概率论中极限理论的许多重要结论对一般的 Banach 空间常常并不成立. 下面简要列举几个基本事实.

(1) 在经典概率论的推理中经常要用到一个事实：如果 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 是相互独立的、有有限二阶矩的、均值为零的随机变量，则有

$$E\left|\sum_{i=1}^n\xi_i\right|^2=\sum_{i=1}^n E|\xi_i|^2$$

但是若将上式中的 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 换成 Banach 空间值随机变量，将其中的绝对值换为相应 Banach 空间的范数，结论却并不普遍成立，这使得经典概率论中的许多重要结果不能得以直接推广.

(2) 设 $\{r_n(t)\}_{n\geqslant 1}$ 是 $[0, 1]$ 上的 Rademacher 函数序列，即

是一种以概率 1/2 取值 ±1 的独立同分布的随机变量序列(或者一个 Bernoulli 序列),在经典概率论中,若 $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ 是实数列,则下列两个条件是等价的:

① $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r_n(t)x_n < +\infty$, $a.e.$;

② $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|x_n\right|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} Var\,[r_n(t)x_n] < +\infty$.

但是,若 $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ 是 Banach 空间 X 中的序列,则上述两个条件一般并不等价.事实上,著名的 Kwapin 定理表明,①与②等价的充分必要条件是 X 线性同胚于 Hilbert 空间.

(3) 下面的例子表明,经典的 Kolmogorov-Chung 强大数定律不能被平行地推广到一般的 Banach 空间中去.

令 $1 < p < 2$,$\{\delta_n\}_{n\geqslant 1}$ 为 l_p 空间中的标准基底,实数 q 满足 $1-\dfrac{1}{p} < q < \dfrac{1}{2}$,$\{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$ 是独立实值随机变量序列,且

$$P(\xi_n = n^q) = P(\xi_n = -n^q) = \frac{1}{2}, \qquad \forall\, n \geqslant 1$$

再令

$$V_n = \xi_n \delta_n, \quad \forall\, n \geqslant 1$$

则 $\{V_n\}_{n\geqslant 1}$ 是 l_p 中独立零均值随机变量序列,并且

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Var(V_n)}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2q}}{n^2} < \infty$$

但是,当 n 为偶数时,

$$\left\| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_k \right\|^p = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^{pq}}{n^p} > \sum_{k=\frac{n}{2}}^{n} \frac{k^{pq}}{n^p} > \sum_{k=\frac{n}{2}}^{n} \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^{pq}}{n^p}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{2} \cdot \frac{n^{pq-p}}{2^{pq}}$$

$$\geqslant \frac{n^{pq+1-p}}{2^{2pq+1}} \to \infty,\ a.e. \qquad (n \to \infty)$$

既然经典的大数定律的结果一般不能平行地推广到无穷维的 Banach 空间中的随机变量上去,那么,为了使 Banach 空间值随机变量序列的大数定律成立,必须加强条件.这种条件通常有两类:一类是概率性条件,即随机变量序列满足某些概率分布方面的要求.此类研究有一系列相应的成果,建议读者可以参阅吴智泉、王向忱的专著《巴氏空间上的概率论》,书中有较系统的总结.另一类是几何性条件,即随机变量所取值的 Banach 空间的几何结构满足某些要求,如空间的 p-型条件、(B)-凸性条件、p-一致光滑性条件等.本节侧重介绍 p-型空间中独立随机变量序列的大数定律.

一、Rademacher 型与余型的定义

首先给出 Rademacher 函数序列的定义.实值函数序列

$$r_n(t) = \operatorname{signsin}(2^n \pi t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad n \geqslant 1$$

称为 Rademacher 函数序列.这一函数序列有一些独特的性质,例如它是定义在 $[0,1]$ 上的规范正交函数序列.特别地,用概率论的术语来描述,$\{r_n(t),\ n \geqslant 1\}$ 是取 ±1 值的独立同分布随机变量序列,并且

$$P(r_n(t) = 1) = P(r_n(t) = -1) = \frac{1}{2}, \qquad \forall\, n \geqslant 1$$

所以,它也被称为是一个 Bernoulli 序列.

众所周知,在经典概率论中有著名的 Khintchin 不等式,即对于任何 $1 \leqslant p < \infty$,存在常数 A_p、$B_p > 0$,使得对每一个实数序列 $\{x_n,\ n \geqslant 1\}$,$\forall\, n \geqslant 1$ 有

$$A_p\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^{n} r_i(t)x_i\right|^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant B_p\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

正如前面所提到的,根据著名的 Kwapin 定理,若将其中的实数列 $\{x_n,\ n \geqslant 1\}$ 换成一般 Banach 空间中的序列,则 Khintchin 不等式不再普遍成立.为了将此问题做更一般的考虑,引入所谓的

Rademacher 型(type)与余型(cotype)的概念.

定义 **2.3.1** 设 X 是 Banach 空间，$1 \leqslant p \leqslant 2 \leqslant q \leqslant \infty$.

(1) 称 X 是 Rademacher p－型空间：若存在常数 $B_p > 0$，使得对于任何 $n \geqslant 1$ 和 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$，有

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \right\|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant B_p \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

满足此式的最小常数 B_p 记为 $T_p(X)$，称 $T_p(X)$ 是 X 的 Rademacher p－型常数.

(2) 称 X 是 Rademacher q－余型空间：若存在常数 $A_q > 0$，使得对于任何 $n \geqslant 1$ 和 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$，有

$$\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant A_q \left(\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \right\|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad 2 \leqslant q < \infty$$

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|x_i\| \leqslant A_q \left(\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \right\|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad q = \infty$$

满足此式的最小常数 A_q 记为 $C_q(X)$，称 $C_q(X)$ 是 X 的 Rademacher q－余型常数.

为了方便起见，今后 Rademacher p－型和 q－余型简称为 p－型 q－余型.

下面对 p－型和 q－余型概念的基本性质做一些说明，此处将通过定理的形式给出一些重要结论，这些结论都可以通过纯分析的方法加以证明. 由于这些都已成为 Banach 空间几何理论中的经典结果，所以这里略去某些较长的证明. 读者可以参阅其他关于 Banach 空间理论的书籍(如俞鑫泰著《Banach 空间选论》).

1. p－型和 q－余型定义中的限制

为什么在 p－型和 q－余型的定义中，对 p 和 q 分别加上 $1 \leqslant p \leqslant 2$ 和 $2 \leqslant q \leqslant \infty$ 的限制呢？事实上，对此有下面的定理.

定理 **2.3.1** (i) 任何 Banach 空间 X 都是 1 型的，并且不可能有大于 2 的型；

(ii) 任何 Banach 空间 X 都是 ∞ 余型的，并且不可能有小于

2 的余型.

证明 (i) 因为对任何 Banach 空间 X 及 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$，有

$$\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \right\| \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \sum_{i=1}^n \|x_i\| \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^n \|x_i\|$$

故任何 Banach 空间 X 都是 1 型的.

若 $p > 2$，且存在 $M > 0$，使得对任何 $n \geqslant 1$ 及 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$，有

$$\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \right\| \mathrm{d}t \leqslant M \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

取 $x_i \equiv x_0 \in S(X) = \{x: x \in X, \|x\| = 1\}$，$1 \leqslant i \leqslant n$，则根据 Khintchin 不等式及上式有

$$A_1 n^{\frac{1}{2}} \leqslant \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^n r_i(t) \right| \mathrm{d}t \leqslant M n^{\frac{1}{p}}, \qquad \forall n \geqslant 1$$

矛盾！故任何 Banach 空间 X 不可能有大于 2 的型.

(ii) 因为对任何 Banach 空间 X，任何 $n \geqslant 1$ 及 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$，有

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \leqslant 2^{-n} \sum_{\theta_i = \pm 1} \left\| \sum_{i=1}^n \theta_i x_i \right\| = \int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \right\| \mathrm{d}t$$

故任何 Banach 空间 X 都是 ∞ 余型的.

若 $q < 2$，且存在 $M > 0$，使得对任意 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$，有

$$M \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \right\| \mathrm{d}t$$

在上式中取 $x_i \equiv x_0 \in S(X) = \{x: x \in X, \|x\| = 1\}$，$1 \leqslant i \leqslant n$，则有

$$M n^{\frac{1}{q}} \leqslant n^{\frac{1}{2}}, \qquad \forall n \geqslant 1$$

矛盾！故任何 Banach 空间 X 不可能有小于 2 的余型. □

由于 $\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ 是 p 的单调递减函数，故有以下结论.

定理 **2.3.2** (i) 若 $1 \leqslant p_2 \leqslant p_1 \leqslant 2$，如果 Banach 空间 X 是 p_1－型，则 X 也是 p_2－型；

(ii) 若 $2 \leqslant q_1 \leqslant q_2 < +\infty$，如果 Banach 空间 X 是 q_1－余型，则也是 q_2－余型.

2. Kahane 不等式

Kahane 不等式可以看作是 Khintchin 不等式在 Banach 空间中的推广，它有许多重要推广，至今关于 Kahane－Khintchin 不等式的研究仍在继续，这里介绍的是一个经典情况.

定理 **2.3.3**(Kahane 不等式) 若 $1<p<\infty$，则存在常数 $k_p>0$ 使得对任何 Banach 空间 X，任何 $n \geqslant 1$ 及 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$，有

$$\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \right\| \mathrm{d}t \leqslant \left(\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \right\|^p \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant K_p \int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \right\| \mathrm{d}t$$

若不关注型常数 $T_p(X)$ 和余型常数 $C_q(X)$ 的大小问题，则由 Kahane 不等式知道在 p－型和 q－余型的定义中数字“2”(及“1/2”)可以用任何数“r”(及“$1/r$”)($1 \leqslant r < \infty$)代替. 虽然，对不同的 r，p－型常数 $T_p(X)$ 和 q－余型常数 $C_q(X)$ 可能改变，但一般来说这并不涉及本质问题.

另外注意到，当取 $\{x_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n} \subset R$ 时，由 Kahane 不等式可以立即得到 Khintchin 不等式. 自然，由此得到的 Khintchin 不等式中的系数 A_p 和 B_p 不一定是最优系数.

3. $L_p(\Omega)$ 空间的型和余型

设 $(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$ 是任意有限测度空间，记 $L_p(\Omega, \mathscr{B}, \mu; R)$ 为 $L_p(\Omega)$，则有以下结论.

定理 **2.3.4** (i) 若 $1 \leqslant p \leqslant 2$，则 $L_p(\Omega)$ 是 p－型和 2－余型空间；

(ii) 若 $2 \leqslant q < +\infty$，则 $L_p(\Omega)$ 是 q－余型和 2－型空间.

4. 型和余型的弱对偶性

定理 **2.3.5** (i) 若 $1 \leqslant p \leqslant 2$，如果 Banach 空间 X 是 p－型空间，则 X^* 是 q－余型空间，其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$；

(ii) 若 $2 \leqslant q < +\infty$，X 是自反 Banach 空间，如果 X 是 q－余型空间，则 X^* 是 p－型空间，其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

5. Kwapin 定理

定理 **2.3.6**(Kwapin) 若 X 是 Banach 空间，则 X 既是 2－型空间又是 2－余型空间，当且仅当 X 同构于 Hilbert 空间.

二、*p*－型空间中的大数定律

前面已经指出，在一般的 Banach 空间中经典概率论中的许多极限定理不再普遍成立. 本节将讨论 Banach 空间中独立随机变量序列的强大数定律，这里并不追求系统和全面，而仅仅讨论 Kolmogorov－Chung 型强大数定律和 Marcinkiewicz－Kolmogorov 型强大数定律这两个最著名的定理在 Banach 空间中的推广，以揭示 Banach 空间的型和余型性质与大数定律之间的内在联系.

1. Kolmogorov－Chung 型强大数定律

1976 年，Hoffmann－Jϕrgense 和 Pisier 证明了下述定理，表明了 Kolmogorov－Chung 的强大数定律与 Banach 空间的型之间的密切联系.

定理 **2.3.7**(Hoffmann－Jϕrgense，Pisier) 设 X 是 Banach 空间，$1 \leqslant p \leqslant 2$，则以下条件等价：

(i) X 是 p－型空间；

(ii) 对任何零均值独立 X 值随机变量序列 $\{x_n, n \geqslant 1\}$，若 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} E \|x_n\|^p < \infty$，则 $\{x_n, n \geqslant 1\}$ 满足强大数定律，即

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j \to 0, \ a.e.$$

(iii) 对任何 $\{x_n\} \in X^{\infty}$，若 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} E \| x_n \|^p < \infty$，则 $\{r_n x_n, n \geqslant 1\}$ 满足强大数定律，即

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \to 0, \ a.e.$$

其中 $\{r_n\}_{n\geqslant 1}$ 为 Bernoulli 数列.

证明 (i)⇒(ii) 若 X 是 $p-$ 型空间，则对任意自然数 n,m，有

$$E \| \sum_{i=n+1}^{n+m} i^{-1} x_i \|^p \leqslant K \sum_{i=n+1}^{n+m} i^{-p} E \| x_i \|^p$$

其中 K 为一仅依赖于 p 而与 n,m，$\{x_i\}$ 均无关的常数. 由于

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^{-p} E \| x_i \|^p < \infty$$

因此 $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{i}$ 在 $L_p(X)$ 中收敛. 利用 Itô－Nisio 定理(即 Lévy 收敛性等价定理的 Banach 空间中的推广)知，$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{i}$ 也几乎处处收敛，再利用 Kroneker 引理得 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \to 0$，$a.e.$.

(ii)⇒(iii) 显然成立.

(iii)⇒(i) 为此考虑两类空间

$$G_0 = \left\{ x = (x_n) \in X^{\infty}, \ \| x \|_{G_0} \triangleq \left(\sum_{i=1}^{\infty} n^{-p} \| x_n \|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

$$G_1 = \left\{ x = (x_n) \in X^{\infty}, \ \| x \|_{G_1} \triangleq \sup_{n\geqslant 1} \left\| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \right\|_{L_p} < \infty \right\}$$

容易证明 G_0、G_1 是 Banach 空间，(iii)的成立蕴涵 $G_0 \subset G_1$. 考虑恒等映射 $I: G_0 \to G_1$，若 $x^{(k)} = (x_n^{(k)}) \in X^{\infty}$ 使得 $\| x^{(k)} \|_{G_1} \to 0$，并且 $\| x^{(k)} - x \|_{G_1} \to 0$，$x = (x_n)$，则前者说明 $x_n^{(k)} \to 0 (k \to \infty)$，后者说明

$$\sup_{n\geqslant 1} \| \sum_{i=1}^{n} r_i (x_i^{(k)} - x_i) \|_{L_p} \to 0 \ (k \to \infty)$$

由此得到对于每一个 n，$x_n^{(k)} \to x_n = 0 \ (k \to \infty)$，从而由闭图像定理知，存在 $C > 0$，使得 $\forall n \geqslant 1$，$(x_n) \in X^{\infty}$，有

$$E(\| \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \|^p) \leqslant C n^p \sum_{i=1}^{n} i^{-p} \| x_i \|^p, \ n \geqslant 1$$

将此式应用于 $(\underbrace{0,\cdots,0}_{k\text{个}}, x_1, \cdots, x_n, 0, \cdots)$，则

$$\begin{aligned} E(\| \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \|^p) &= E(\| \sum_{i=k+1}^{k+n} r_i x_{i-k} \|^p) \\ &\leqslant C (k+n)^p \sum_{i=1}^{n} (i+k)^{-p} \| x_i \|^p \\ &\leqslant C\left(\frac{k+n}{k+1}\right)^p \sum_{i=1}^{n} \| x_i \|^p \end{aligned}$$

上式中令 $k \to \infty$，得到

$$E(\| \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \|^p) \leqslant C \sum_{i=1}^{n} \| x_i \|^p$$

从而 X 是 $p-$ 型空间. □

2. Marcinkiewicz-Kolmogorov 型强大数定律

1981 年，De Acosta 的下述定理刻画了 Marcinkiewicz－Kolmogorov 强大数定律与空间的几何性质的密切联系.

定理 2.3.8 设 X 是可分 Banach 空间，$1 \leqslant p \leqslant 2$，则下述条件等价：

(i) X 是 $p-$ 型空间；

(ii) 对于每个零均值独立同分布的 X 值随机变量序列 $\{x_n\}$，若 $E\| x_1 \|^p < \infty$，则

$$\frac{1}{n^{1/p}}\sum_{i=1}^{n} x_i \to 0, \ a.e.$$

证明 (i)⇒(ii) 注意，对于每一个 $f \in X^*$，$\{f(x_n)\}$ 为实值独立随机变量序列. 因此

$$f\left(\frac{S_n}{n^{1/p}}\right) \to 0 \text{ , a.e., 其中 } S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

若 X 是 p－型空间，F 是 X 的有限维子空间，则商空间 X/F 仍为 p－型空间. 若 $\|x\|_F$ 是 X/F 上的范数，则 $\forall \varepsilon > 0$，有

$$P\left(\left\|\frac{S_n}{n^{1/p}}\right\| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{n\varepsilon^p} E\|S_n\|_F^p$$

$$\leqslant \frac{C}{n\varepsilon^p}\sum_{i=1}^{n} E\|x_i\|_F^p$$

$$\leqslant \frac{C}{\varepsilon^p} E\|x_1\|_F^p$$

由于 $E\|x_1\|^p < \infty$，若记 X 的所有有限维子空间为 $\mathscr{B}$，由 X 的可分性容易得到

$$\lim_{F\in\mathscr{B}} E\|x_1\|_F^p = 0.$$

设 $\mu\left(\frac{S_n}{n^{1/p}}\right)$ 为 $\frac{S_n}{n^{1/p}}$ 的分布函数. 考虑 X 上的分布函数的全体 $\mathscr{D}$，$\mathscr{D}$ 中的序列 μ_n 弱收敛于 μ 的充要条件是对于任何有界连续函数 g，$\int_X g\,\mathrm{d}\mu_n \to \int_X g\,\mathrm{d}\mu$. 在关于 $\frac{S_n}{n^{1/p}}$ 的上述两条件下，$\mu\left(\frac{S_n}{n^{1/p}}\right)$ 构成了 $\mathscr{D}$ 中的弱相对紧集，甚至为收敛序列，其极限是在零点的 Dirac 测度 δ_0. 从而 $\frac{S_n}{n^{1/p}} \xrightarrow{P} 0$，进一步知 $\frac{S_n}{n^{1/p}} \to 0$，a.e..

(ii)⇒(i) 由于任何 Banach 空间都是 1－型的，所以不妨设 $p > 1$，定义

$$G_0 = \{x \in L_p, Ex = 0\}, \qquad \|x\|_{G_0} = \|x\|_{L_p}$$

$$G_1 = \{x \in L_p\}, \qquad \|x\|_{G_1} = \sup_n E\left\|\frac{S_n}{n^{1/p}}\right\|$$

容易验证 G_0，G_1 均为 Banach 空间. 考虑包含映射 $J: G_0 \to G_1$. 易知 J 具有闭图像，从而是连续的. 于是存在 $C > 0$，使得

$\forall x \in G_0$，有

$$E\|S_n\| \leqslant Cn^{1/p}\|x_1\|_{L_p}$$

从而知 X 是 p－型空间. □

3. q－余型的概率刻画

定理 **2.3.9** 设 X 是可分 Banach 空间，$2 \leqslant q < \infty$，则下述条件等价：

(i) X 是 q－余型空间；

(ii) 若 $\{x_n\}_{n\geqslant 1} \subset X$，使 $\sum_{n=1}^{\infty} r_n(t)x_n < +\infty$，a.e.，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^q < \infty$，即 $\{x_n\}_{n\geqslant 1} \in l_q(X)$；

(iii) 若 $\{x_n\}_{n\geqslant 1} \subset X$，使 $\sup_n\left\|\sum_{i=1}^{n} r_i(t)x_i\right\| < +\infty$，a.e.，则 $\{x_n\}_{n\geqslant 1} \in l_q(X)$.

证明 (i)⇒(iii) 若 $\{x_n\}_{n\geqslant 1} \subset X$，使得

$$\sup_n\left\|\sum_{i=1}^{n} r_i(t)x_i\right\| < +\infty \text{, a.e.，则}$$

$$\sup_n\left\|\sum_{i=1}^{n} r_i(t)x_i\right\| \in L_2(X)$$

从而

$$\sup_n\left(\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^{n} r_i(t)x_i\right\|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \left(\int_0^1\left(\sup_n\left\|\sum_{i=1}^{n} r_i(t)x_i\right\|^2\right)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

因为 X 是 q－余型空间，故存在常数 K，对任何 n，有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant K\left(\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^{n} r_i(t)x_i\right\|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant K\left(\int_0^1\left(\sup_n\left\|\sum_{i=1}^{n} r_i(t)x_i\right\|^2\right)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

因此，$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^q\right)^{\frac{1}{q}}<\infty$.

(iii)⇒(ii) 显然成立.

(ii)⇒(i) 令

$$V_0=\left\{x=\{x_n\}_{n\geqslant 1}\subset X;\quad \sum_{n=1}^{\infty}r_n(t)x_n<\infty,\ a.e.\right\}$$

$$\|x\|_{V_0}=\|\{x_n\}_{n\geqslant 1}\|_{V_0}\triangleq\sup_n\left(\int_0^1\|\sum_{i=1}^{n}r_i(t)x_i\|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$V_q=l_q(X)$$

由于，若 $\sum_{n=1}^{\infty}r_n(t)x_n<\infty$，则 $\sup_n\|\sum_{i=1}^{n}r_i(t)x_i\|<\infty$. 于是

$$\|\{x_n\}_{n\geqslant 1}\|_{V_0}=\sup_n\left(\int_0^1\|\sum_{i=1}^{n}r_i(t)x_i\|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\left(\int_0^1\left(\sup_n\|\sum_{i=1}^{n}r_i(t)x_i\|^2\right)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}<\infty$$

容易验证 $(V_0,\|\cdot\|_{V_0})$ 是 Banach 空间，据条件(ii)，映射：

$$I: V_0\to V_q,\ 其中\ I(\{x_n\}_{n\geqslant 1})=\{x_n\}_{n\geqslant 1}$$

是可以定义的，且易证 I 是闭线性算子. 根据闭图像定理，I 是有界线性算子，由此立即得到 X 是 q－余型空间. □

对于独立随机变量序列，有以下重要结论.

定理 2.3.10 设 X 是可分 Banach 空间，$2\leqslant q<\infty$，则下述条件等价：

(i) X 是 q－余型空间；

(ii) 存在某个常数 K，使得若 $\{x_n(\omega)\}_{n\geqslant 1}$ 是 X 值零均值独立随机变量序列，则

$$\sum_{i=1}^{n}E\|x_i(\omega)\|^q\leqslant KE\|\sum_{i=1}^{n}x_i(\omega)\|^q$$

证明从略. 参阅参考文献[67](1976).

三、Clarkson 型不等式与型和余型常数

Clarkson 不等式首先是由 Clarkson 于 1936 年在研究一致凸空间时提出并证明的，随后引起许多学者的关注，并分别从不同的研究角度得到一系列各种推广形式. 这里将介绍的事实，证明 Clarkson 不等式与 Banach 空间的型和余型常数之间有密切联系.

在定义 2.3.1 中已给出了 p－型和 q－余型的定义. 正如前面已经指出的，由 Kahane 不等式，显然还有下面等价的定义形式.

定义 2.3.2 设是 Banach 空间，$1\leqslant p\leqslant 2\leqslant q\leqslant\infty$，$1\leqslant s<\infty$.

(1) 称 X 是 Rademacher p－型空间：若存在常数 $M_p>0$，使得对于任何 $n\geqslant 1$ 和 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in X$，有

$$\left(\int_0^1\|\sum_{i=1}^{n}r_i(t)x_i\|^s\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{s}}\leqslant M_p\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\tag{2.3.1}$$

满足此式的最小常数 M_p 记为 $T_{p(s)}(X)$，称 $T_{p(s)}(X)$ 是 X 的 Rademacher $p(s)$－型常数.

(2) 称 X 是 Rademacher q－余型空间：若存在常数 $N_q>0$，使得对于任何 $n\geqslant 1$ 和 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in X$，有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^q\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant N_q\left(\int_0^1\|\sum_{i=1}^{n}r_i(t)x_i\|^s\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{s}},\qquad 2\leqslant q<\infty$$

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\|x_i\|\leqslant N_q\left(\int_0^1\|\sum_{i=1}^{n}r_i(t)x_i|\|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}},\qquad q=\infty\tag{2.3.2}$$

满足此式的最小常数 N_q 记为 $C_{q(s)}(X)$，称 $C_{q(s)}(X)$ 是 X 的 Rademacher $q(s)$－余型常数.

注*：① 当 $s=2$ 时，定义 2.3.2 即为定义 2.3.1；

② 显然，若 $1\leqslant s_1\leqslant s_2$，则有

$$1\leqslant T_{p(s_1)}(X)\leqslant T_{p(s_2)}(X)$$

$$1\leqslant C_{q(s_2)}(X)\leqslant C_{q(s_1)}(X)$$

③ 注意到所有Banach空间均是1－型空间和∞－余型空间，而且对于任意 $1\leqslant s<\infty$，有

$$T_{1(s)}(X)=C_{\infty(s)}(X)=1$$

④ 由Rademacher函数序列的定义，有

$$\left(\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right\|^s\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{s}}=\left(\frac{1}{2^n}\sum_{\theta_i=\pm1}\left\|\sum_{i=1}^n\theta_i x_i\right\|^s\right)^{\frac{1}{s}}$$

为了叙述方便，规定以下分别以 p',q' 和 s' 表示指标 p,q 和 s 的共轭数，即满足

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1,\ \frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1,\ \frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1$$

定理2.3.11 设 $1<p\leqslant 2$ 且 $p\leqslant s\leqslant p'$，对于任何 $x,y\in X$，则Banach空间满足Clarkson型不等式

$$(\|x+y\|^s+\|x-y\|^s)^{\frac{1}{s}}\leqslant 2^{\frac{1}{s}}(\|x\|^p+\|y\|^p)^{\frac{1}{p}}\tag{2.3.3}$$

当且仅当 X 是 p－型空间且 $T_{p(s)}(X)=1$.

特别地，X 成立Clarkson型不等式

$$(\|x+y\|^{p'}+\|x-y\|^{p'})^{\frac{1}{p'}}\leqslant 2^{\frac{1}{p'}}(\|x\|^p+\|y\|^p)^{\frac{1}{p}}$$

相应地

$$(\|x+y\|^p+\|x-y\|^p)^{\frac{1}{p}}\leqslant 2^{\frac{1}{p}}(\|x\|^p+\|y\|^p)^{\frac{1}{p}}$$

当且仅当 X 是 p－型空间且 $T_{p(p')}(X)=1$，相应地 $T_{p(p)}(X)=1$.

证明 (1) 充分性. 只须注意到定义中取 $M_p=1$ 和 $n=2$，则上述Clarkson型不等式仅是 p－型空间定义中不等式的特例.

(2) 必要性. 设 X 成立(2.3.3)式，证明(2.3.1)式成立，且 $M_p=1$. 用归纳法. 当 $n=2$ 时，结论成立是显然的. 假设(2.3.1)式当 $n=k$ 时成立，则当 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\left\|\sum_{j=1}^{k+1}r_j(t)x_j\right\|^s\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\left\|\sum_{j=1}^{k}r_j(t)x_j+x_{k+1}\right\|^s+\left\|\sum_{j=1}^{k}r_j(t)x_j-x_{k+1}\right\|^s\right)\mathrm{d}t\\
&\leqslant\int_0^1\left(\left\|\sum_{j=1}^{k}r_j(t)x_j\right\|^p+\|x_{k+1}\|^p\right)^{\frac{s}{p}}\mathrm{d}t\\
&\leqslant\left[\left(\int_0^1\left\|\sum_{j=1}^{k}r_j(t)x_j\right\|^s\mathrm{d}t\right)^{\frac{p}{s}}+\left(\int_0^1\|x_{k+1}\|^s\mathrm{d}t\right)^{\frac{p}{s}}\right]^{\frac{s}{p}}\\
&\leqslant\left[\sum_{j=1}^{k}\|x_j\|^p+\|x_{k+1}\|^p\right]^{\frac{s}{p}}\\
&=\left[\sum_{j=1}^{k+1}\|x_j\|^p\right]^{\frac{s}{p}}
\end{aligned}$$

从而对于任何 $n\geqslant 1$ 成立

$$\left(\int_0^1\left\|\sum_{j=1}^{n}r_j(t)x_j\right\|^s\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{s}}\leqslant\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$ □

定理2.3.12 设 $2\leqslant q<\infty$ 且 $q'\leqslant s\leqslant q$，对于任何 $x,y\in X$，则Banach空间满足Clarkson型不等式

$$(\|x+y\|^q+\|x-y\|^q)^{\frac{1}{q}}\leqslant 2^{\frac{1}{s'}}(\|x\|^s+\|y\|^s)^{\frac{1}{s}}\tag{2.3.4}$$

当且仅当 X 是 q－余型空间且 $C_{q(s)}(X)=1$.

特别地，X 成立Clarkson型不等式

$$(\|x+y\|^q+\|x-y\|^q)^{\frac{1}{q}}\leqslant 2^{\frac{1}{q}}(\|x\|^{q'}+\|y\|^{q'})^{\frac{1}{q'}}$$

相应地

$$(\|x+y\|^q+\|x-y\|^q)^{\frac{1}{q}}\leqslant 2^{\frac{1}{q}}(\|x\|^q+\|y\|^q)^{\frac{1}{q}}\tag{2.3.5}$$

当且仅当 X 是 q－余型空间且 $C_{q(q')}(X)=1$，相应地 $C_{q(q)}(X)=1$.

证明 显然，(2.3.4)式与下式等价

$$(\|x\|^q+\|y\|^q)^{\frac{1}{q}}\leqslant 2^{-\frac{1}{s}}(\|x+y\|^s+\|x-y\|^s)^{\frac{1}{s}}$$

这只须分别令(2.3.4)式和(2.3.5)式中 $x+y=u$ 和 $x-y=v$，然后相互替换即可.(2.3.2)式中取 $N_q=1$ 和 $n=2$ 则充分性是显然的.

设 X 成立(2.3.4)式或等价地成立(2.3.5)式，用归纳法证明(2.3.2)式成立，且 $N_q=1$. 当 $n=2$ 时，结论成立是显然的. 假设(2.3.2)式当 $n=k$ 时成立，则当 $n=k+1$ 时，有

$$\int_0^1\|\sum_{j=1}^{k+1}r_j(t)x_j\|^s\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1(\|\sum_{j=1}^{k}r_j(t)x_j+x_{k+1}\|^s+\|\sum_{j=1}^{k}r_j(t)x_j-x_{k+1}\|^s)\mathrm{d}t$$

$$\geqslant\int_0^1(\|\sum_{j=1}^{k}r_j(t)x_j\|^q+\|x_{k+1}\|^q)^{\frac{s}{q}}\mathrm{d}t$$

$$\geqslant\left[\left(\int_0^1\|\sum_{j=1}^{k}r_j(t)x_j\|^s\mathrm{d}t\right)^{\frac{q}{s}}+\left(\int_0^1\|x_{k+1}\|^s\mathrm{d}t\right)^{\frac{q}{s}}\right]^{\frac{s}{q}}$$

$$\geqslant\left[\sum_{j=1}^{k}\|x_j\|^q+\|x_{k+1}\|^q\right]^{\frac{s}{q}}$$

$$=\left[\sum_{j=1}^{k+1}\|x_j\|^q\right]^{\frac{s}{q}}$$

从而对于任何 $n\geqslant 1$，成立

$$\left(\int_0^1\|\sum_{j=1}^{n}r_j(t)x_j\|^s\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{s}}\geqslant\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$ □

§2.4 鞅不等式与 Banach 空间的凸性和光滑性

前面介绍了 Banach 空间的 RNP，型和余型与随机过程的概率性质之间存在的内在密切联系，这类性质属于 Banach 空间的拓扑性质，即仅依赖于空间的拓扑而在等价范数下不会改变的一

些属性. 本节将介绍 Banach 空间的一致凸性和一致光滑性，并揭示其与鞅不等式之间的密切关系. 这是一类由空间特定范数所确定的度量性质，当范数改变为等价范数时可能会随之改变的空间属性.

一、凸性模与光滑模

以下仍设 $(X,\|\cdot\|)$ 为实 Banach 空间.

定义 2.4.1 若 X 是 Banach 空间，其维数 $\dim X\geqslant 2$，称

$$\delta_X(\varepsilon)=\inf\left\{1-\frac{\|x+y\|}{2}\ \middle|\ \|x\|=\|y\|=1,\ \|x-y\|=\varepsilon\right\}$$

$$(0\leqslant\varepsilon\leqslant 2)$$

是 X 的凸性模(modulus of convexity)；称

$$\rho_X(\tau)=\sup\left\{\frac{1}{2}(\|x+y\|+\|x-y\|)-1\ \middle|\ \|x\|=1,\|y\|=\tau\right\}$$

$$(\tau>0)$$

是 X 的光滑模(modulus of smoothness).

Banach 空间 X 称为是一致凸的：若对于任何 $\varepsilon>0$，$\delta_X(\varepsilon)>0$；称为是一致光滑的：若 $\lim\limits_{\tau\to 0}\frac{\rho_X(\tau)}{\tau}=0$.

例 1 对于 Hilbert 空间 H，由平行四边形公式直接得出

$$\delta_X(\varepsilon)=1-(1-\frac{\varepsilon^2}{4})^{\frac{1}{2}}=\frac{\varepsilon^2}{8}+o(\varepsilon^4),\qquad 0<\varepsilon<2$$

$$\rho_X(\tau)=(1+\tau^2)^{\frac{1}{2}}-1=\frac{\tau^2}{2}+o(\tau^4),\qquad \tau>0$$

所以 H 既是一致凸的又是一致光滑的.

例 2 设 $\|\cdot\|_2$ 是 l_2 上的范数，则 $(l_2,\|\cdot\|_2)$ 是 Hilbert 空间，若在 l_2 上定义新范数

$$\|x\|=\max(2|x_1|,\|x_2\|),\qquad \forall x=(x_n)\in l_2$$

容易知道 $\|x\|_2 \leqslant \|x\| \leqslant 2\|x\|_2$，所以 $\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|_2$ 是等价范数．但 l_2 在范数 $\|\cdot\|$ 下不是一致凸的．例如，取 $\varepsilon = \frac{1}{2}$，$x = \left(\frac{1}{2}, 0, \cdots\right)$，$y = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \cdots\right)$，则 $\|x\| = \|y\| = 1$，$\|x-y\| = \frac{1}{2}$，此时 $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| = 1$，$\delta_{(l_2, \|\cdot\|)}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

此例说明 Banach 空间的一致凸性依赖于特定的范数，当范数改变为等价范数时可能会随之改变．

关于凸性模和光滑模，介绍以下几个最基本的性质．

定理 2.4.1 设 X 是 Banach 空间，X^* 是 X 的共轭空间，则

(i) $\rho_{X^*}(\tau) + \delta_X(\varepsilon) \geqslant \frac{1}{2}\tau\varepsilon$，　$(\tau > 0,\ 0 \leqslant \varepsilon \leqslant 2)$

(ii) $\rho_{X^*}(\tau) = \sup\limits_{0\leqslant\varepsilon\leqslant 2}\left(\frac{\tau\varepsilon}{2} - \delta_x(\varepsilon)\right)$，　$(\tau > 0)$

(iii) $\rho_X(\tau) = \sup\limits_{0\leqslant\varepsilon\leqslant 2}\left(\frac{\tau\varepsilon}{2} - \delta_{X^*}(\varepsilon)\right)$，　$(\tau > 0)$

(iv) X 是一致凸空间，当且仅当 X^* 是一致光滑空间．

证明　(i) 记 $S_p(X) = \{x \in X, \|x\| = 1\}$，设 $x, y \in S_p(X)$，$\|x-y\| = \varepsilon$．取 $x^*, y^* \in S_p(X^*)$，使得

$$x^*(x+y) = \|x+y\|,\qquad y^*(x-y) = \|x-y\|$$

则

$$\begin{aligned}2\rho_{X^*}(\tau) &\geqslant \|x^* + \tau y^*\| + \|x^* - \tau y^*\| - 2\\ &\geqslant x^*(x) + \tau y^*(x) + x^*(y) - \tau y^*(y) - 2\\ &= x^*(x+y) + \tau y^*(x-y) - 2\\ &= \|x+y\| + \tau\varepsilon - 2\end{aligned}$$

从而

$$2\rho_{X^*}(\tau) + 2 - \|x+y\| \geqslant \tau\varepsilon$$

$$\rho_{X^*}(\tau) + \left(1 - \frac{\|x+y\|}{2}\right) \geqslant \frac{1}{2}\tau\varepsilon$$

据 x, y 的任意性，故必有(i)成立．

(ii) 在上述证明过程中，只要关于 $x^*, y^* \in S_p(X^*)$ 或关于 $x, y \in S_p(X)$（保持 $\|x-y\| = \varepsilon$）取上确界，上述各式均为等式，即可得(ii)式成立．

(iii) 设 $x^*, y^* \in S_p(X^*)$，$\|x^* - y^*\| = \varepsilon$，$\forall \eta > 0$，取 $x, y \in S_p(X)$，使得

$$(x^* + y^*)x \geqslant \|x^* + y^*\| - \eta$$

$$(x^* - y^*)y \geqslant \|x^* - y^*\| - \eta$$

则

$$\begin{aligned}2\rho_X(\tau) &\geqslant \|x + \tau y\| + \|x - \tau y\| - 2\\ &\geqslant x^*x + \tau x^*y + y^*x - \tau y^*y - 2\\ &= (x^* + y^*)x + \tau(x^* - y^*)y - 2\\ &\geqslant \|x^* + y^*\| + \tau\|x^* - y^*\| - 2 - (1+\tau)\eta\\ &= \|x^* + y^*\| + \tau\varepsilon - 2 - (1+\tau)\eta\end{aligned}$$

即

$$2\rho_X(\tau) + 2 - \|x^* + y^*\| \geqslant \tau\varepsilon - (1+\tau)\eta$$

η 是任意的，与(ii)中一样取上确界，即得(iii)成立．

(iv) 首先，设 X^* 是一致光滑空间，则 $\lim\limits_{\tau\to 0}\frac{\rho_{X^*}(\tau)}{\tau} = 0$．对于 $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 2$，取 τ 足够小，以至于 $\frac{\rho_{X^*}(\tau)}{\tau} < \frac{\varepsilon}{4}$，则 $\rho_{X^*}(\tau) < \frac{\tau\varepsilon}{4}$．利用(i)中的不等式，$\delta_X(\varepsilon) > \frac{\varepsilon\tau}{4} > 0$，故 X 是一致凸空间．

反之，设 X 是一致凸的，由(ii)式得

$$\frac{\rho_{X^*}(\tau)}{\tau} = \sup_{0\leqslant\varepsilon\leqslant 2}\left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\delta_X(\varepsilon)}{\tau}\right)$$

若 $\overline{\lim\limits_{\tau\to 0}}\frac{\rho_{X^*}(\tau)}{\tau} = a > 0$，则必有序列 $\{\varepsilon_n\}$，$\{\tau_n\}$，其中 $\tau_n \to 0$

$(n\to\infty)$，使得 $\frac{\varepsilon_n}{2}-\frac{\delta_X(\varepsilon_n)}{\tau}\geqslant\frac{a}{2}$. 不妨设 $\varepsilon_n\to a_0(n\to\infty)$，否则过渡到子列，则 $a_0\geqslant a$. 从而 $\delta_X(\varepsilon_n)\leqslant(\frac{\varepsilon_n}{2}-\frac{a}{2})\tau_n$，此时必有 $\delta_X(a_0)=0$，矛盾. 于是有 $\lim\limits_{\tau\to0}\frac{\rho_{X^*}(\tau)}{\tau}=0$，即 X^* 是一致光滑的.

□

定理 2.4.2 一致凸空间与一致光滑空间都是自反空间.

证明 只须证明一致凸空间自反，之后由定理 2.4.1(iv)得到一致光滑空间自反.

$\forall x\in X^{**}$，$\|x\|=1$. 由于 $B_X=\{x\in X:\|x\|\leqslant1\}$ 在 $B_{X^{**}}=\{x\in X^{**}:\|x\|\leqslant1\}$ 中是 ω^* 稠密的，取网 $\{x_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$，使得 $\omega^*-\lim\limits_{\lambda\in\Lambda}x_\lambda=x$，再取 $f\in X^*$，$\|f\|=1$ 使得 $f(x)>1-\delta_X(\varepsilon)$. 于是 $\exists\lambda_0$ 使得 $\lambda,\lambda'\geqslant\lambda_0$ 时

$$f(x_\lambda)\geqslant1-\delta_X(\varepsilon),\ f(x_{\lambda'})\geqslant1-\delta_X(\varepsilon)$$

$$\left\|\frac{x_\lambda+x_{\lambda'}}{2}\right\|\geqslant f\left(\frac{x_\lambda+x_{\lambda'}}{2}\right)\geqslant1-\delta_X(\varepsilon)$$

于是由一致凸性，$\|x_\lambda-x_{\lambda'}\|\leqslant\varepsilon$，$X$ 完备，故存在 $y\in X$，依 X 的范数 $y=\lim\limits_{\lambda\in\Lambda}x_\lambda=x$；即 $x\in X$ 或 $X=X^{**}$，从而 X 自反.

□

二、p 一致光滑空间和 q 一致凸空间

定义 2.4.2 称 Banach 空间 X 是 p 一致光滑的，若存在 $C>0$，使得

$$\rho_X(\tau)\leqslant C\tau^p,\qquad(\tau>0)$$

称 X 是 q 一致凸的，若存在 $C>0$，使得

$$\delta_X(\varepsilon)\geqslant C\varepsilon^q,\qquad(0\leqslant\varepsilon\leqslant2)$$

前面已经指出，Banach 空间的一致光滑性和一致凸性都属于在等价范数下并不能得以保持的度量性质，因此引入如下定义.

定义 2.4.3 称 Banach 空间 X 是 p 一致可光滑(或可一致光滑)的，若存在等价范数使之成为 p 一致光滑(或一致光滑)空间；称 Banach 空间 X 是 q 一致可凸(或可一致凸)的，若存在等价范数使之成为 q 一致凸(或一致凸)空间.

定理 2.4.3 对于任何 Banach 空间 X，其一致光滑性定义中的指数 p 不可能大于 2，一致凸性定义中的指标 q 不可能小于 2 .

证明 设有 $0<q<2$ 和 $C>0$，使得

$$\delta_X(\varepsilon)\geqslant C\varepsilon^q,\qquad(0\leqslant\varepsilon\leqslant2)$$

注意由 Dvoretzky 定理，l_2 在任一 Banach 空间中有限可表现. 据例 1 中计算的结果 $\delta_{l_2}(\varepsilon)=\frac{\varepsilon^2}{8}+o(\varepsilon^2)$，故

$$\delta_{l_2}(\varepsilon)\geqslant\delta_X(\alpha\varepsilon)\geqslant C\alpha^q\varepsilon^q,\quad 0<\alpha<1,\quad 0<\varepsilon<2$$

由 $\frac{\varepsilon^2}{8}+o(\varepsilon^2)\geqslant C\alpha^q\varepsilon^q$ 或 $\frac{\varepsilon^{2-q}}{8}+o(\varepsilon^{2-q})\geqslant C\alpha^q$，$\varepsilon$ 可任意小，容易得出 $C=0$，矛盾.

同样地，若有 $2<p<\infty$ 和 $C>0$，使得 $\rho_X(\tau)\leqslant C\tau^p$，由于 $\rho_{l_2}(\tau)=\frac{1}{2}\tau^2+o(\tau^2)$，$\rho_{l_2}(\tau)\leqslant\rho_X(\tau)$，容易得出 $C=0$. □

定理 2.4.4 Banach 空间 X 是 q 一致凸的当且仅当 X^* 是 p 一致光滑的，其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$2\leqslant q<\infty$.

证明 (1) 必要性. 设 $2\leqslant q<\infty$，$C>0$，$\delta_X(\varepsilon)\geqslant C\varepsilon^q$，$(0\leqslant\varepsilon\leqslant2)$. 由定理 2.4.1 之(ii)，有

$$\rho_{X^*}(\tau)=\sup_{0\leqslant\varepsilon\leqslant2}\left(\frac{\tau\varepsilon}{2}-\delta_X(\varepsilon)\right)\leqslant\sup_{0\leqslant\varepsilon\leqslant2}\left(\frac{\tau\varepsilon}{2}-C\varepsilon^q\right)$$

$\varphi(\varepsilon)=\left(\frac{\tau\varepsilon}{2}-C\varepsilon^q\right)$ 是凹函数，其极大值在 $\left(\frac{\tau}{2Cq}\right)^{\frac{1}{q-1}}$ 达到，极大值为

$$\frac{\tau}{2}\left(\frac{\tau}{2Cp}\right)^{\frac{1}{p-1}}-C\left(\frac{\tau}{2Cp}\right)^{\frac{p}{p-1}}\sim C'\tau^{\frac{q}{q-1}}=C'\tau^p$$

其中 C' 为常数，于是得到 $\rho_{X^*}(\tau) \leqslant C'\tau^p$，$(\tau > 0)$. 从而 X^* 是 p 一致光滑空间.

(2) 充分性. 若 $1 < p \leqslant 2$，$C > 0$，$\rho_{X^*}(\tau) \leqslant C\tau^p$，据定理 2.4.1 之(i)，有

$$\delta_X(\varepsilon) = \sup_{\tau > 0}\left(\frac{\tau\varepsilon}{2} - \rho_{X^*}(\tau)\right)$$

类似于(1)的讨论可得，X 是 q 一致凸空间. □

定理 2.4.5 设 X 是 Banach 空间，$1 < p \leqslant 2 \leqslant q < \infty$.

(i) X 是 p 一致光滑空间，当且仅当存在 $K > 0$，使得对任何 $x, y \in X$，有

$$\|x+y\|^p + \|x-y\|^p \leqslant 2\|x\|^p + K\|y\|^p \tag{2.4.1}$$

(ii) X 是 q 一致凸空间，当且仅当存在 $K > 0$，使得对任何 $x, y \in X$，有

$$\|x+y\|^q + \|x-y\|^q \geqslant 2\|x\|^q + K\|y\|^q \tag{2.4.2}$$

证明 (i) 充分性. 若(2.4.1)式成立，取 $x, y \in X$，$\|x\| = 1$，$\|y\| = \tau$，则

$$\frac{1}{2}(\|x+y\|^p + \|x-y\|^p) - 1 \leqslant \frac{K}{2}\tau^p$$

由于

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| + \left\|\frac{x-y}{2}\right\| \geqslant \left\|\frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}(x-y)\right\| = 1$$

根据 $\varphi(t) = t^p$ 的凸函数性质

$$\begin{aligned}\rho_X(\tau) &= \sup\left\{\left(\frac{\|x+y\| + \|x-y\|}{2}\right) - 1\right\} \\ &\leqslant \sup\left\{\left(\frac{\|x+y\| + \|x-y\|}{2}\right)^p - 1\right\} \\ &\leqslant \sup\left\{\frac{1}{2}(\|x+y\|^p + \|x-y\|^p) - 1\right\} \\ &\leqslant \frac{K}{2}\tau^p\end{aligned}$$

必要性. 容易验证下面的基本不等式：

$$u^p - v^p \leqslant pu^{p-1}(u - v), \qquad u, v \geqslant 0 \tag{2.4.3}$$

$$\frac{1}{2}|u+v|^p + \frac{1}{2}|u-v|^p \leqslant |u|^p + |v|^p, \qquad u, v \in R. \tag{2.4.4}$$

若 $C > 0$，$\rho_X(\tau) \leqslant C\tau^p$，$\tau > 0$，则 $\forall x, y \in X$，$\|x\| = 1$，$\|y\| = \tau$，有

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| + \left\|\frac{x-y}{2}\right\| - 1 \leqslant C\|y\|^p$$

由于范数的齐性，上式可改写为：$\forall x, y \in X\ (x \neq 0)$，

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| + \left\|\frac{x-y}{2}\right\| \leqslant \|x\|\left[1 + C\left(\frac{\|y\|^p}{\|x\|^p}\right)\right]$$

或者

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(\|x+y\| - (\|x\| + \|y\|) + \\ &\quad \|x-y\| - (\|x\| - \|y\|)) \\ &\leqslant C\|x\| \frac{\|y\|^p}{\|x\|^p}\end{aligned} \tag{2.4.5}$$

若 $\|y\| \leqslant \|x\|$，则 $\|x+y\| \leqslant 2\|x\|$，应用不等式(2.4.3)，分别令 $u = \|x+y\|$，$v = \|x\| + \|y\|$；和令 $u = \|x-y\|$，$v = \|x\| - \|y\|$，则分别得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\|x+y\|^p - \frac{1}{2}(\|x\| + \|y\|)^p \\ &\leqslant \frac{p}{2}\|x+y\|^{p-1}(\|x+y\| - (\|x\| + \|y\|)) \\ &\frac{1}{2}\|x-y\|^p - \frac{1}{2}(\|x\| - \|y\|)^p \\ &\leqslant \frac{p}{2}\|x-y\|^{p-1}(\|x-y\| - (\|x\| - \|y\|))\end{aligned}$$

两式相加再应用(2.4.5)及(2.4.4)式得到

$$\frac{1}{2}(\|x+y\|^p+\|x-y\|^p)$$

$$\leqslant \frac{p}{2}((\|x\|+\|y\|)^p+(\|x\|-\|y\|)^p)+$$

$$p(2\|x\|)^{p-1}2\|x\|\ \frac{C\|y\|^p}{\|x\|^p}$$

$$\leqslant \|x\|^p+\|y\|^p+p2^pC\|y\|^p$$

$$=\|x\|^p+(1+p2^pC)\|y\|^p$$

若 $\|y\|\geqslant\|x\|$，则直接由 $\|x\pm y\|\leqslant 2\|y\|$ 得到

$$\frac{1}{2}(\|x+y\|^p+\|x-y\|^p)$$

$$\leqslant \|2y\|^p\leqslant \|x\|^p+2^p\|y\|^p$$

于是必有 $K>0$ 使(2.4.1)式成立.

(ii) 充分性. 若(2.4.2)式成立，对于任给 $u,v\in X$，考虑 $x=\|u\|v+\|v\|u$，$y=\|u\|v-\|v\|u$，代入(2.4.2)式得到

$$2(2\|u\|\ \|v\|)^q$$

$$\geqslant 2\|\ \|u\|v+\|v\|u\|^q+K\|\ \|u\|v-\|v\|u\|^q$$

若 $\|u\|=\|v\|=1$，$\|u-v\|=\varepsilon$，则得到

$$2^{q+1}\geqslant 2\|u+v\|^q+K\varepsilon^q$$

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^q\leqslant 1-\frac{K}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^q$$

由不等式 $1-\alpha^q\leqslant q(1-\alpha)$ $(0\leqslant\alpha\leqslant 1)$ 得到

$$\delta_X(\varepsilon)=\inf\left\{1-\left\|\frac{u+v}{2}\right\|\right\}$$

$$\geqslant\frac{1}{q}\inf\left\{1-\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^q\right\}=\frac{K\varepsilon^q}{2^{q+1}q}$$

必要性. 若 $C>0$，$\delta_X(\varepsilon)\geqslant C\varepsilon^q$，由定理 2.4.4 知，存在 $C'>0$，使得

$$\rho_{X^*}(\tau)\leqslant C'\tau$$

于是由(i)的证明，$\forall x^*, y^*\in X^*$，有 $K>0$，使得

$$\|x^*+y^*\|^p+\|x^*-y^*\|^p\leqslant 2\|x^*\|^p+K\|y^*\|^p$$

令 $k=2\tau^p$ 并且用 y^* 代替 τy^*，则得到

$$\|x^*+\tau^{-1}y^*\|^p+\|x^*-\tau^{-1}y^*\|^p$$

$$\leqslant 2\|x^*\|^p+\|y^*\|^p$$

对于任给 $x,y\in X$，取 $x^*, y^*\in X^*$，使得

$$\|x^*\|^2+\|y^*\|^2=1$$

$$x^*(x+y)+\tau^{-1}y^*(x-y)=(\|x+y\|^q+\|x-y\|^q)^{1/q}$$

于是

$$\|x+y\|^q+\|x-y\|^q$$

$$=\left|x^*(x+y)+\tau^{-1}y^*(x-y)\right|^q$$

$$\leqslant(\|x^*+\tau^{-1}y^*\|\ \|x\|+\|x^*-\tau^{-1}y^*\|\ \|y\|)^q$$

$$\leqslant(\|x^*+\tau^{-1}y^*\|^p+\|x^*-\tau^{-1}y^*\|^p)^{q/p}(\|x\|^q+\|y\|^q)$$

$$\leqslant(2(\|x^*\|^p+\|y^*\|^p))^{q/p}(\|x\|^q+\|y\|^q)$$

$$=2^{q/p}(\|x\|^q+\|y\|^q)$$

于是

$$\|x\|^q+\|y\|^q\geqslant(\|x+y\|^q+\|x-y\|^q)2^{-q/p}$$

用 $x+y$ 替换 x，$x-y$ 替换 y，即得

$$\|x+y\|^q+\|x-y\|^q\geqslant(\|2x\|^q+\|2y\|^q)2^{-q/p}$$

$$=2^{-q/p}(\|x\|^q+\|y\|^q)$$ □

定理2.4.6 设 $1<p\leqslant 2\leqslant q<\infty$，则

(i) p 一致可光滑空间是 Rademacher p 型空间；

(ii) q 一致可凸空间是 Rademacher q 余型空间.

证明 若 X 是 p 一致可光滑空间，则 $\forall x_1,x_2,\cdots,x_n\in X$，有

$$\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right\|^p dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\left\|\sum_{i=1}^{n-1}r_i(t)x_i+x_n\right\|^p+\left\|\sum_{i=1}^{n-1}r_i(t)x_i-x_n\right\|^p\right)dt$$

其中 $\{r_i(t)\}$ 是 Rademacher 函数序列，由定理 2.4.5 知

$$\int_0^1 \| \sum_{i=1}^n r_i(t)x_i \|^p \mathrm{d}t$$

$$\leqslant \int_0^1 \left(\| \sum_{i=1}^{n-1} r_i(t)x_i \|^p + \frac{K}{2} \| x_n \|^p \right) \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 \| \sum_{i=1}^{n-1} r_i(t)x_i \|^p \mathrm{d}t + \frac{K}{2} \| x_n \|^p$$

反复运用此方法，最终得到

$$\int_0^1 \| \sum_{i=1}^n r_i(t)x_i \|^p \mathrm{d}t \leqslant \frac{K}{2} \sum_{i=1}^n \| x_i \|^p$$

从而 X 是 p 型的．对于 p 一致可光滑空间，换为等价范数，结论仍成立．

对于 q 一致可凸空间可以完全类似证明． □

三、凸性和光滑性与鞅不等式

1975 年，Assouad 给出了 p 一致光滑空间和 q 一致凸空间如下的由条件数学期望确定的特征性质，这将成为后面建立 Banach 空间值鞅不等式的基础．

定理 **2.4.7**(Assouad)　设 X 是 Banach 空间，$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是概率空间，$1 < p \leqslant 2 \leqslant q < \infty$，则

(i) X 是 p 一致光滑空间，当且仅当存在常数 $C > 0$，使得对于 $L_p(X, P)$ 中任何两函数 g_1，g_2，其中 g_i 关于 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{F}_i$ 可测，$\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2 \subset \mathscr{F}$，并且 $E(g_2 \mid \mathscr{F}_1) = g_1$，则

$$E(\| g_2 \|^p - \| g_1 \|^p \mid \mathscr{F}_1) \leqslant CE(\| g_2 - g_1 \|^p \mid \mathscr{F}_1) \tag{2.4.6}$$

(ii) X 是 q 一致凸空间，当且仅当存在常数 $C > 0$，使得对于 $L_q(X, P)$ 中任何两函数 g_1，g_2，其中 g_i 关于 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{F}_i$ 可测，$\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2 \subset \mathscr{F}$，并且 $E(g_2 \mid \mathscr{F}_1) = g_1$，则

$$E(\| g_2 \|^q - \| g_1 \|^q \mid \mathscr{F}_1) \geqslant CE(\| g_2 - g_1 \|^q \mid \mathscr{F}_1) \tag{2.4.7}$$

证明　(i) 必要性．设 X 是 p 一致光滑空间，据定理 2.4.5 知 $\exists K > 0$，使得 $\forall x, y \in X$ 有

$$\| x + y \|^p + \| x - y \|^p \leqslant 2 \| x \|^p + K \| y \|^p \tag{2.4.8}$$

由于 $2g_1 - E(g_2 \mid \mathscr{F}_1) = g_1$，由 Jensen 不等式得到

$$\| g_1 \|^p = \| 2g_1 - E(g_2 \mid \mathscr{F}_1) \|^p \leqslant E(\| 2g_1 - g_2 \|^p \mid \mathscr{F}_1)$$

(2.4.8)式中令 $x = g_1$，$y = g_2 - g_1$，并且关于 $\mid \mathscr{F}_1$ 取条件期望得

$$E(\| g_2 \|^p + \| g_1 \|^p \mid \mathscr{F}_1)$$

$$\leqslant E(\| g_2 \|^p + \| 2g_1 - g_2 \|^p \mid \mathscr{F}_1)$$

$$\leqslant 2E(\| g_1 \|^p \mid \mathscr{F}_1) + KE(\| g_2 - g_1 \|^p \mid \mathscr{F}_1)$$

故(2.4.6)式得证．

充分性．设(2.4.6)式成立，$\forall x$，$y \in X$，令 $g_1 = x$，$g_2 = x + \varepsilon y$，其中 ε 是一个 Bernoulli 随机变量，即 $P(\varepsilon = 1) = P(\varepsilon = -1) = \frac{1}{2}$，则 $E(g_2 \mid \mathscr{F}_1) = g_1$，其中 $\mathscr{F}_1 = \sigma(\{\varepsilon = 1\}, \{\varepsilon = -1\})$．代入(2.4.6)式且不等式两端取数学期望得

$$E(\| x + \varepsilon y \|^p - \| x \|^p) \leqslant C \| y \|^p$$

此即(2.4.1)式，据定理 2.4.5 知 X 是 p 一致光滑空间．

(ii) 同样应用定理 2.4.5，可借助于 q 一致凸空间的不等式(2.4.2)，类似于(i)可证． □

接下来，运用 Assouad 定理，讨论关于 Banach 空间值鞅的矩不等式．

定理 **2.4.8**(Pisier)　设 X 是 Banach 空间，则

(i) X 是 p 一致光滑空间 $(1 < p \leqslant 2)$，当且仅当存在常数 $C > 0$，使得对于每一个 $L_p(\Omega, \mathscr{F}, P; X)$ 鞅 $f = (f_n)_{n \geqslant 0}$ 成立

$$\sup_{n \geqslant 0} E \| f_n \|^p \leqslant E \| f_0 \|^p + C \sum_{n=1}^{\infty} E \| df_n \|^p \tag{2.4.9}$$

(ii) X 是 q 一致凸空间 $(2 \leqslant q < \infty)$，当且仅当存在常数 $C > 0$，使得对于每一个 $L_q(\Omega, \mathscr{F}, P; X)$ 鞅 $f = (f_n)_{n \geqslant 0}$ 成立

$$\sup_{n\geqslant 0} E\| f_n \|^q \geqslant E\| f_0 \|^q + C\sum_{n=1}^{\infty} E\| df_n \|^q \qquad (2.4.10)$$

证明　(i) 必要性. 设 X 是 p 一致光滑空间，定理 2.4.7 之(2.4.6)式中取 $g_2 = f_n$，$g_1 = f_{n-1}$，则得

$$E(\| f_n \|^p - \| f_{n-1} \|^p \mid \mathscr{F}_{n-1})$$
$$\leqslant KE(\| f_n - f_{n-1} \|^p \mid \mathscr{F}_{n-1}), \qquad \forall n \geqslant 0$$

取数学期望得

$$E\| f_n \|^p - E\| f_{n-1} \|^p$$
$$\leqslant KE\| f_n - f_{n-1} \|^p = KE\| df_n \|^p, \qquad \forall n \geqslant 0$$

将所有这些不等式相加即得公式(2.4.9).

充分性的证明是显然的.

(ii) 运用定理 2.4.7 之(ii)，类似于(i)可证. □

现在介绍一种特殊的鞅，称 $f = (f_n)_{n\geqslant 0}$ 是 Walsh－Paley 鞅(有时简称 WP 鞅)，若 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是 $[0,1)$ 上的 Lebesgue 测度，$\mathscr{F}_n$ 是由二进制区间 $\left\{\left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right), 1 \leqslant i \leqslant 2^n\right\}$ 生成的 $\sigma-$代数，并且 $P(df_{n+1} = \pm x) = \frac{1}{2^{n+1}}$，$x$ 随 n，i 的不同而改变. WP 鞅是一种特殊的鞅，自然对于它(2.4.9)式、(2.4.10)式成立. 另一方面，定理 2.4.7 的充分性证明中所举出的 x 与 $x + \varepsilon y$ 恰好是一个 WP 鞅的最前面两项，因此有以下结论.

定理 **2.4.9**(Pisier)　设 X 是 Banach 空间，则

(i) X 是 p 一致光滑空间 $(1 < p \leqslant 2)$，当且仅当存在常数 $C > 0$，使得对于每一个 X 值 WP 鞅(2.4.9)式成立；

(ii) X 是 q 一致凸空间 $(2 \leqslant q < \infty)$，当且仅当存在常数 $C > 0$，使得对于每一个 X 值 WP 鞅(2.4.10)式成立.

注意(2.4.9)和(2.4.10)两式在 Banach 空间 X 的等价范数之下不能保持不变. 进一步，对于 p 一致可光滑空间和 q 一致可凸空间有下面结果，这是由 Pisier 于 1975 年所证明的.

定理 **2.4.10**(Pisier)　设 X 是 Banach 空间，则

(i) X 是 p 一致光滑空间 $(1 < p \leqslant 2)$，当且仅当存在常数 $C > 0$，使得对于任何 X 值鞅 $f = (f_n)_{n\geqslant 0}$ 成立

$$\sup_{n\geqslant 0} E\| f_n \|^p \leqslant C\sum_{n=0}^{\infty} E\| df_n \|^p \qquad (2.4.11)$$

(ii) X 是 q 一致凸空间 $(2 \leqslant q < \infty)$，当且仅当存在常数 $C > 0$，使得对于每一个 X 值鞅 $f = (f_n)_{n\geqslant 0}$ 成立

$$C\sup_{n\geqslant 0} E\| f_n \|^q \geqslant \sum_{n=0}^{\infty} E\| df_n \|^q \qquad (2.4.12)$$

上述鞅换为 WP 鞅其结论仍然成立.

证明　必要性. 设 X 的范数是 $\|\cdot\|$，在等价范数 $|\cdot|$ 之下成为 p 一致光滑空间，则定理 2.4.8 之(2.4.9)式成立，于是

$$\sup_{n\geqslant 0} E| f_n |^p \leqslant E| f_0 |^p + C\sum_{n=1}^{\infty} E| df_n |^p$$
$$\leqslant (C \vee 1)\left(E| f_0 |^p + \sum_{n=1}^{\infty} E| df_n |^p\right)$$
$$= (C \vee 1)\sum_{n=0}^{\infty} E| df_n |^p$$

因范数 $\|\cdot\|$ 与 $|\cdot|$ 等价，故存在 $a, b > 0$，使得 $\forall x \in X$，有 $a\| x \| \leqslant | x | \leqslant b\| x \|$，于是

$$a^p \sup_{n\geqslant 0} E\| f_n \|^p \leqslant (C \vee 1) b^p\left(\sum_{n=0}^{\infty} E\| df_n \|^p\right)$$

或者

$$\sup_{n\geqslant 0} E\| f_n \|^p \leqslant (C \vee 1)\left(\frac{b}{a}\right)^p\left(\sum_{n=0}^{\infty} E\| df_n \|^p\right)$$

此即(2.4.11)式.

同样地，假设 X 在等价范数 $|\cdot|$ 之下成为 q 一致凸空间，则由(2.4.10)式可得(2.4.12)式.

充分性. 只证明(ii)的充分性，至于(i)的充分性可以类似证明. 为此考虑 WP 鞅，令

$$M(x)=\{f=(f_n), f \text{ 是 } L_q(X) \text{ 有界 WP 鞅}, f_0=x\}$$

并且令

$$|x| = \inf\left\{\left(C\sup_{n\geqslant 0}E|f_n|^q - \sum_{n=0}^{\infty}E|df_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}, f\in M(x)\right\}$$

显然 $|x|\geqslant 0$，并且由于 $M(\alpha x)=\alpha M(x)$，于是 $|\alpha x|=|\alpha||x|$，又由 $|x|$ 的定义知

$$\|x\| \leqslant |x| \leqslant C^{\frac{1}{q}}\|x\|$$

代替验证关于 $|\cdot|$ 的三角不等式，要验证 $\{x;|x|\leqslant 1\}$ 是凸集，而这一点只要证明

$$\left|\frac{x+y}{2}\right|^q + C^{-\frac{1}{q}}\left|\frac{x-y}{2}\right|^q \leqslant \frac{1}{2}(|x|^q+|y|^q)$$

$$\forall\ x, y\in X$$

即可. 这个不等式还说明了 $(X,|\cdot|)$ 是 q 一致凸空间.

$\forall\,\delta>0$，取 $f=(f_n)\in M(x)$，$g=(g_n)\in M(y)$，使得

$$f_0=x,\ \sup_{n\geqslant 0}E\|f_n\|^q<\infty$$

$$C\sup_{n\geqslant 0}E\|f_n\|^q - \sum_{n=0}^{\infty}E\|df_n\|^q \leqslant |x|^q+\delta$$

$$g_0=y,\ \sup_{n\geqslant 0}E\|g_n\|^q<\infty$$

$$C\sup_{n\geqslant 0}E\|g_n\|^q - \sum_{n=0}^{\infty}E\|dg_n\|^q \leqslant |y|^q+\delta.$$

f，g 都是 WP 鞅. 取 ε_1 是 Bernoulli 随机变量，令 $h=(h_n)$ 是鞅，其中

$$h_0=\frac{x+y}{2},\qquad h_n=\frac{1+\varepsilon_1}{2}f_{n-1}+\frac{1-\varepsilon_1}{2}g_{n-1},\qquad n\geqslant 1$$

显然有 $\sup_{n\geqslant 0}E\|h_n\|^q<\infty$，$h_n$ 是 WP 鞅，$h\in M\left(\frac{x+y}{2}\right)$. 于是利用函数 $\varphi(t)=t^q$ 的凸性，得

$$\left|\frac{x+y}{2}\right|^q \leqslant C\sup_{n\geqslant 0}E\|h_n\|^q - \sum_{n=0}^{\infty}E\|dh_n\|^q$$

$$\leqslant \frac{C}{2}\sup_{n\geqslant 0}E\left(\|f_n\|^q+\|g_n\|^q\right) - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^q$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}E\left(\|df_n\|^q+\|dg_n\|^q\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left(|x|^q+|y|^q\right) - \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^q + 2\delta$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left(|x|^q+|y|^q\right) - C^{-\frac{1}{q}}\left|\frac{x-y}{2}\right|^q + 2\delta$$

由于 $\delta>0$ 是任意的，故得

$$\left|\frac{x+y}{2}\right|^q + C^{-\frac{1}{q}}\left|\frac{x-y}{2}\right|^q \leqslant \frac{1}{2}(|x|^q+|y|^q)$$

以 $x+y$ 代替 x，以 $x-y$ 代替 y 即得

$$\left|\frac{x+y}{2}\right|^q + \left|\frac{x-y}{2}\right|^q \geqslant 2|x|^q + C^{-\frac{1}{q}}|y|^q \qquad \square$$

1990 年，刘培德[52] 证明了如下关于鞅的条件矩不等式，这为后面鞅空间的讨论带来很大方便.

定理 **2.4.11**（刘培德） 设 X 是 Banach 空间，$2\leqslant q<\infty$，则以下条件相互等价：

(i) X 是 q 一致可凸空间；

(ii) 存在 $C=C_q>0$，使得对于每一个 X 值 q 可积鞅 $f=(f_n)$ 和任何 $0\leqslant n\leqslant m$，有

$$E\left(\sum_{i=n+1}^{m}\|df_i\|^q\mid\mathscr{F}_n\right)\leqslant CE\left(\|f_m-f_n\|^q\mid\mathscr{F}_n\right) \tag{2.4.13}$$

并且（或者）

$$E\left(\sum_{i=n}^{m}\|df_i\|^q\mid\mathscr{F}_n\right)\leqslant CE\left(\|f_m-f_{n-1}\|^q\mid\mathscr{F}_n\right) \tag{2.4.14}$$

证明 (i)⇒(ii) 首先，设 X 是 q 一致凸空间，$\mathscr{B}_i$ 是 $\mathscr{F}$ 的子

σ—代数，g_i 是关于 $\mathscr{B}_i$ 可测的函数（$i=1,2$），$\mathscr{B}_1 \subset \mathscr{B}_2$，并且 $E(g_2 \mid \mathscr{B}_1) = g_1$. 应用 Assouad 定理于 g_1，g_2 得到

$$E(\| g_2 \|^q - \| g_1 \|^q \mid \mathscr{B}_1) \geqslant KE(\| g_2 - g_1 \|^q \mid \mathscr{B}_1) \tag{2.4.15}$$

这里 K 是与 g_1, g_2 的选取无关的常数. 固定 n 并且定义

$$\widetilde{f}_i = f_{n+i} - f_n, \qquad \widetilde{\mathscr{F}}_i = \mathscr{F}_{n+i} \qquad (i \geqslant 0)$$

则 $\widetilde{f} = (\widetilde{f}_i)$ 是鞅. 在(2.4.15)式中令 $\widetilde{f}_i = g_1$，$\widetilde{f}_{i+1} = g_2$，$i=0,1,2,\cdots,m-n$，然后相加起来，关于 $\mathscr{F}_n$ 取条件数学期望得

$$E(\| f_m - f_n \|^q \mid \mathscr{F}_n) \geqslant KE\left(\sum_{i=n+1}^{m} \| df_i \|^q \mid \mathscr{F}_n\right)$$

记 $C = \frac{1}{K}$，则(2.4.13)式成立.

其次，若 X 是 q 一致凸空间，先应用等价 q 一致凸范数得到(2.4.13)式，然后必要时改变 C 的值，(2.4.13)式仍成立.

在上述证明过程中，若代替 $\mathscr{F}_n$ 关于 $\mathscr{F}_{n+1}$ 取条件数学期望，则可以得到(2.4.14)式成立.

(ii)⇒(i) 若每一个 q 可积鞅满足(2.4.13)或(2.4.14)式，由 m，n 的任意性，取数学期望得

$$\sum_{i=1}^{\infty} E\| df_i \|^q \leqslant C2^q \sup_{n\geqslant 0} E\| f_n \|^q$$

由定理 2.4.10，说明 X 是 q 一致凸空间. □

类似于定理 2.4.11，还可以证明关于 p 一致可光滑空间的类似结论如下：

定理 **2.4.12**（刘培德） 设 X 是 Banach 空间，$1 < p \leqslant 2$，则以下条件相互等价：

(i) X 是 p 一致可光滑空间；

(ii) 存在 $C = C_p$，使得对于每一个 X 值 p 可积鞅 $f=(f_n)$ 和任何 $0 \leqslant n \leqslant m$ 有

$$E(\| f_m - f_n \|^p \mid \mathscr{F}_n) \leqslant CE\left(\sum_{i=n+1}^{m} \| df_i \|^p \mid \mathscr{F}_n\right)$$

并且(或者)

$$E(\| f_m - f_{n-1} \|^p \mid \mathscr{F}_n) \leqslant CE\left(\sum_{i=n}^{m} \| df_i \|^p \mid \mathscr{F}_n\right)$$

§2.5 鞅的 q 均方函数的增长速度与Banach空间的一致凸性

上节借助鞅的矩不等式刻画了 Banach 空间的一致凸性，这里进一步介绍利用鞅的 q 均方函数的增长速度刻画 Banach 空间的 q 一致凸性，这种对 Banach 空间一致凸性的研究方法是由刘培德在 1994 年引入的.

设 X 是 Banach 空间，$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是概率空间，与 $\mathscr{F}$ 的递增子 σ—代数序列 $\{\mathscr{F}_n\}_{n\geqslant 1}$ 相适应的 X 值鞅记为 $f=(f_n)$ 或者 $f=(f_n, n\geqslant 1)$，其鞅差记为 $df=(df_n)$，这里 $df_n = f_n - f_{n-1}$，$n \geqslant 1$，$f_0 = 0$，$\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$. f 的 q 均方函数记为 $S^{(q)}(f)$，即

$$S^{(q)}(f) = \sup_n S_n^{(q)}(f), \qquad S_n^{(q)}(f) = \left(\sum_{i=1}^{n} \| df_i \|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

首先，介绍一个引理，这是由刘培德在 1989 年所证明的，细节参见刘培德[55].

引理 **2.5.1** 设 X 是 Banach 空间，$2 \leqslant q < \infty$，则 X 是 q 一致凸空间，当且仅当对任何 X 值鞅(或 WP 鞅) $f=(f_n)$，当 $\| f \|_{L_q} < \infty$ 时有 $S^{(q)}(f) < \infty$，$a.e.$.

定理 **2.5.2** 设 X 是 Banach 空间，$2 \leqslant q < \infty$，则以下条件等价：

(i) X 是 q 一致可凸空间；

(ii) 对于每个 X 值鞅 $f=(f_n)$，若 $\sup_n \| \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} df_i \|^q < \infty$，则

$$\frac{1}{n} S_n^{(q)}(f) \to 0, \ a.e. \tag{2.5.1}$$

(iii) 对于每个 X 值 Walsh－Paley 鞅 $f=(f_n)$，若 $\sup\limits_n \| \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i} df_i \|^q < \infty$，则依概率

$$\frac{1}{n} S_n^{(q)}(f) \to 0 \tag{2.5.2}$$

证明　(i)⇒(ii) 若 $f=(f_n)$ 是 X 值鞅，则令 $\tilde{f}_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i} df_i$，$\tilde{f}=(\tilde{f}_n)$ 也是鞅．由定理 2.4.10，根据 X 的 q 一致可凸性质，存在常数 $C_q > 0$，使得

$$E\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^{-q}} \| df_n \|^q \Big) \leqslant C_q^q \sup_n E\Big(\| \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} df_i \|^q \Big) < \infty$$

于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^{-q}} \| df_n \|^q < \infty$，$a.e.$，由 Kronecher 引理得(2.5.1)式成立，故(ii)成立．

(ii)⇒(iii)　显然．

(iii)⇒(i)　根据引理 2.5.1 可知，Banach 空间 X 是 q 一致可凸空间，当且仅当对于每一个 X 值 Walsh－Paley 鞅 $f=(f_n)$，若 $\| f \|_{L_q} < \infty$，则 $S^{(q)}(f) < \infty$，$a.e.$，现在考虑两种 X 值鞅空间：

$$G_0 = \Big\{ f=(f_n) : \sup_n \| \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} df_i \|_{L_q} < \infty \Big\}$$

$$G_1 = \Big\{ f=(f_n) : \frac{1}{n} S_n^{(q)}(f) \to 0 \text{ 依概率成立} \Big\}$$

标准的验证表明 G_0 是以 $\sup\limits_n \| \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i} df_i \|_{L_q}$ 为范数的 Banach 空间，G_1 是以

$$\rho(f,g) = \sup_n \int_\Omega \frac{| S_n^{(q)}(f) - S_n^{(q)}(g) |}{n + | S_n^{(q)}(f) - S_n^{(q)}(g) |} \mathrm{d}P \tag{2.5.3}$$

为度量函数的 Fréchet 空间，条件(iii)意味着 $G_0 \subset G_1$．此外容易验证 I：$G_0 \to G_1$ 有闭图像，从而 I 是连续线性算子．于是，

$\forall \varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得当 $\sup\limits_n \| \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i} df_i \|_{L_q} < \delta$ 时，有

$$\sup_n \int_\Omega \frac{S_n^{(q)}(f)}{n + S_n^{(q)}(f)} \mathrm{d}P = \rho(f,0) < \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon} \tag{2.5.4}$$

或者由明显的不等式得出

$$\sup_n P\Big(\frac{S_n^{(q)}(f)}{n} > \varepsilon \Big) \leqslant \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \sup_n \int_\Omega \frac{S_n^{(q)}(f)}{n + S_n^{(q)}(f)} \mathrm{d}P < \varepsilon$$

现在设 X 值鞅 $f=(f_n)$ 满足 $\sup\limits_n \| f_n \|_{L_q} < \infty$，不妨设 $\sup\limits_n \| f_n \|_{L_q} < \delta$，令 $\tilde{f} = (\tilde{f}_n)$，$\tilde{f}_n = \sum\limits_{i=1}^{n} i df_i$，$n \geqslant 1$，则 $\sup\limits_n \| \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i} d\tilde{f}_i \|_{L_q} < \delta$，由上面所述可得出

$$\sup_n P\Big(n^{-q} \sum_{i=1}^{n} i^q \| df_i \|^q > \varepsilon^q \Big) = \sup_n P(n^{-1} S_n^{(q)}(\tilde{f}) > \varepsilon) < \varepsilon \tag{2.5.5}$$

代替鞅差 $(df_1, df_2, \cdots)$，考虑 $(0, \cdots, 0, df_1, \cdots df_n, \cdots)$ 确定的鞅，则(2.5.5)式成为

$$P\Big((n+k)^{-q} \sum_{i=1}^{n} (i+k)^q \| df_i \|^q > \varepsilon^q \Big) < \varepsilon$$

k 是任意的，令 $k \to \infty$，则由此式得到

$$P\Big(\sum_{i=1}^{n} \| df_i \|^q > \varepsilon^q \Big) \leqslant \varepsilon \tag{2.5.6}$$

先由 n 的任意性，再由 ε 的任意性，最后得到 $S^{(q)}(f) < \infty$，$a.e.$．于是由引理 2.5.1 得出 X 是 q 一致可凸空间．□

§2.6　鞅的大数定律与 Banach 空间的 p 一致光滑性

鞅差序列的大数定律是独立随机变量序列大数定律向相依随机变量序列的一种推广．前面，曾讨论了 p 型空间中独立随机变

量序列的大数定律，本节将进一步讨论 p 一致可光滑空间中鞅的收敛性和鞅差序列的大数定律

从前面的讨论中可知，对于 p 型 Banach 空间 X，存在常数 $C>0$，使得对任意 $n\geqslant 1$ 及具有零均值的独立随机变量序列 x_1，$x_2,\cdots,x_n\in X$ 都有

$$E(\|\sum_{i=1}^{n}x_i\|^p)\leqslant C\sum_{i=1}^{n}E(\|x_i\|^p)$$

这个不等式对证明 p 型空间中的独立随机变量序列的极限定理起着十分关键的作用，而根据定理 2.4.10 中的 Pisier 不等式，当 X 是 p 一致可光滑空间时，则存在 $C>0$，使得对于任意 $n\geqslant 1$ 及 X 中的鞅差序列 $df_1,df_2,\cdots,df_n\in X$ 都有

$$E(\|f_n\|^p)=E(\|\sum_{i=1}^{n}df_i\|^p)\leqslant C\sum_{i=1}^{n}E(\|df_i\|^p)$$

实质上，上述两个不等式分别是对 p 型空间和 p 一致可光滑空间属性的一种本质性刻画．另一方面，p 一致可光滑空间又是具有 RNP 的，利用这些性质，可以建立 p 一致可光滑空间值鞅差序列的大数定律．同时，鞅的极限定理又能反过来刻画 Banach 空间的 p 一致可光滑性．

一、p 一致光滑空间中的鞅的收敛性

定理 2.6.1 设 X 是 p 一致可光滑空间，$1<p\leqslant 2$，$f=(f_n)$ 是 X 值鞅，若 $\sum_{n=1}^{\infty}E\left(\|df_n\|^p\mid\mathscr{F}_{n-1}\right)<\infty$，$a.e.$，则 $\{f_n\}$ $a.e.$ 收敛．

证明　对于 $\lambda>0$，令

$$\tau=\inf\left\{n;\ \sum_{i=1}^{n+1}E(\|df_i\|^p\mid\mathscr{F}_{i-1})>\lambda\right\}$$

则 τ 是停时．考虑鞅 $f^{(\tau)}=(f_{\tau\wedge n})$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}E\|df_{\tau\wedge n}\|^p=\sum_{i=1}^{\tau}E\|df_i\|^p$$

$$=E\left(\sum_{i=1}^{\tau}E(\|df_i\|^p\mid\mathscr{F}_{i-1})\right)\leqslant\lambda$$

于是由 X 的 p 一致可光滑性知

$$\sup_{n\geqslant 1}E\|f_{\tau\wedge n}\|^p\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}E\|df_{\tau\wedge n}\|^p\leqslant C\lambda$$

由于 p 一致可光滑空间 X 具有 RNP，故 $f_{\tau\wedge n}$ $a.e.$ 收敛．在 $\{\tau=\infty\}=\left\{\sum_{i=1}^{\infty}E\left(\|df_i\|^p\mid\mathscr{F}_{i-1}\right)\leqslant\lambda\right\}$ 上，$f_{\tau\wedge n}=f_n$，故 f_n 在 $\{\tau=\infty\}$ 上 $a.e.$ 收敛．λ 是任意的，并且 $\sum_{i=1}^{\infty}E\left(\|df_i\|^p\mid\mathscr{F}_{i-1}\right)<\infty$，$a.e.$，故 f_n 几乎处处收敛． □

1975 年，Pisier 研究了 p 一致可光滑空间中鞅的收敛性问题，并给出了如下结果：

定理 2.6.2 设 $1<p\leqslant 2$，X 是 Banach 空间，则下列条件等价：

(i) X 是 p 一致可光滑空间；

(ii) 对于每一个 X 值鞅 $f=(f_n)$，若 $\sum_{n=1}^{\infty}E(\|df_n\|^p)<\infty$，则存在 $f_\infty\in L_p(X)$，使得 $f_n\xrightarrow{L_p}f_\infty$；

(iii) 对于每一个 X 值鞅 $f=(f_n)$，若 $\sum_{n=1}^{\infty}E(\|df_n\|^p)<\infty$，则存在 $f_\infty\in L_p(X)$，使得 $f_n\xrightarrow{a.e.}f_\infty$；

(iv) 对于每一个 X 值鞅 $f=(f_n)$，若 $\sum_{n=1}^{\infty}E(\|df_n\|^p)<\infty$，则存在 $f_\infty\in L_p(X)$，使得 $f_n\xrightarrow{P}f_\infty$．

证明　(ii)⇒(iii)⇒(iv) 是显然的，因此只需证明(i)⇒(ii)和(iv)⇒(i)．

(i)⇒(ii) 设 X 是 p 一致可光滑空间，若 $\sum_{n=1}^{\infty}E(\|df_n\|^p)<$

∞，则由 Pisier 不等式得

$$E\|f_n\|^p\leqslant C\sum_{i=1}^{n}E(\|df_i\|^p)$$

即 $f=(f_n)$ 是 L_p 有界的. 由于 p 一致可光滑空间具有 RNP，从而存在 $f_\infty\in L_p(X)$，使得 $f_n\xrightarrow{P}f_\infty$.

(iv)⇒(i) 只需对 WP 鞅证明即可. 不妨设 $f_0=0$，考虑 WP 鞅的两类空间：

$$G=\left\{f=(f_n);\ \|f\|=\left(\sum_{n=1}^{\infty}E\|df_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\infty\right\}$$

$$G_0=\left\{f=(f_n);\ \rho(f,0)=\sup_{n\geqslant1}\int_\Omega\frac{\|f_n\|}{1+\|f_n\|}\mathrm{d}P\right\}$$

例行的验证说明，$(G,\ \|\cdot\|)$ 是 Banach 空间，G_0 是以 $\rho(f,g)=\rho(f-g,0)$ 为度量的 Fréchet 空间，条件(iv)说明恒等映射 $I: G\to G_0$ 定义合理且有闭图像，从而 I 连续. 这说明对于 $\forall\,0<\varepsilon<1$，$\forall\,\delta>0$，使得当每一个鞅满足 $\sum_{n=1}^{\infty}E(\|df_n\|^p)<\delta$ 时

$$\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}P\Big(\|f_n\|>\varepsilon\Big)\leqslant\int_\Omega\frac{\|f_n\|}{1+\|f_n\|}\mathrm{d}P\leqslant\varepsilon^2,\quad(\forall\ n\geqslant1)$$

或者

$$\sup_{n\geqslant1}P\Big(\|f_n\|>\varepsilon\Big)<2\varepsilon \tag{2.6.1}$$

定义停时 $\tau=\inf\{n;\ \|f_n\|>\varepsilon\}$，则 $f^{(\tau)}=(f_{\tau\wedge n})$ 是停止鞅，由于

$$df_{\tau\wedge n}=df_n\chi_{\{\tau\geqslant n\}},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}E\|df_{\tau\wedge n}\|^p\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}E\|df_n\|^p<\delta$$

于是

$$P\Big(\|f_{\tau\wedge n}\|>\varepsilon\Big)=P(\tau\leqslant n)<2\varepsilon$$

故有

$$P(f^*>\varepsilon)=P(\tau<\infty)=\lim_{n\to\infty}P(\tau\leqslant n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}P(\|f_{\tau\wedge n}\|>\varepsilon)\leqslant2\varepsilon$$

这说明当 $f^*>1$，$a.e.$ 时，必有 $C>0$ 使得 $\sum_{n=1}^{\infty}E\|df_n\|^p\geqslant C$. 以此证明，对于每个自然数 k，

$$\lambda^pP(f_k^*>2)\leqslant\sum_{n=1}^{k}E\|df_n\|^p \tag{2.6.2}$$

不妨设 $P(f_k^*>2)>0$，取 $f^{(j)}=(f_n^{(j)})$ 是 f 的独立同分布鞅，令 $A_j=\{f_k^{(j)*}\leqslant2\}$，$u_j=\chi_{A_j}$，并且定义鞅 $\widetilde{f}=(\widetilde{f}_n)$，其鞅差为：

$(df_1^{(1)},\cdots,df_k^{(1)},u_1df_1^{(2)},\cdots,u_1df_k^{(2)},u_1u_2df_1^{(3)},\cdots,u_1u_2df_k^{(3)},\cdots)$

注意 $Eu_j=P(f_k^*\leqslant2)$，对于 $\widetilde{f}=(\widetilde{f}_n)$ 有

$$\sum_{n=1}^{k_j}E\|d\widetilde{f}_n\|^p=\Big[1+Eu_1+\cdots+(Eu_1)^{j-1}\Big]\sum_{n=1}^{k}E\|df_n\|^p$$

令 $j\to\infty$ 得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}E\|d\widetilde{f}_n\|^p\leqslant\frac{1}{1-Eu_1}\sum_{n=1}^{k}E\|df_n\|^p \tag{2.6.3}$$

由于 u_j 相互独立并且 $\sum_{j=1}^{\infty}P(u_j=0)=\infty$，故由 Borel-Cantelli 引理必有 $P(A_k,\mathrm{i.o})=1$，这说明 $\widetilde{f}^*\geqslant1$，$a.e.$，于是 $\sum_{n=1}^{\infty}E\|d\widetilde{f}_n\|^p\geqslant C$，(2.6.3)式变为

$$CP(\widetilde{f}_k^*>2)\leqslant\sum_{n=1}^{k}E\|df_n\|^p \tag{2.6.4}$$

此不等式对于任何鞅成立. 将 f 换为 $\frac{2f}{\lambda}=\left(\frac{2f_n}{\lambda}\right)$，$C$ 记为 $\frac{2^p}{C}$，则

$$P(f^*>\lambda)\leqslant C\lambda^{-p}\sum_{n=1}^{\infty}E\|df_n\|^p \tag{2.6.5}$$

现在设 $f=(f_n)$ 是 WP 鞅，$\delta,\lambda>0$，$\beta>\delta+1$，定义

$$\mu=\inf\{n;\ f_n^*>\lambda\}$$

$$\nu=\inf\{n;\ f_n^*>\beta\lambda\}$$

$$\sigma=\inf\left\{n;\ \left(\sum_{i=1}^{n+1}\|df_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}>\delta\lambda\right\}$$

由于 $\|df_n\|$ 关于 $\mathscr{F}_{n-1}$ 可测，故 μ,ν,σ 为停时. 令 $u_k=\chi_{\{\mu<k\leqslant\sigma\wedge\nu\}}$，$u_k$ 可料，故 $\widetilde{f}=(\widetilde{f}_n)=\left(\sum_{k=1}^{n}u_kdf_k;\ n\geqslant1\right)$ 是 WP 鞅. 注意在 $\left\{\mu<k\leqslant\sigma\wedge\nu\right\}$ 上，只要 $\mu<\infty$，就有

$$\left(\sum_{i=1}^{k}\|u_idf_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{i=1}^{k}\|df_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\delta\lambda\chi_{\{\mu<\infty\}}$$

于是

$$E\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|u_idf_i\|^p\right)\leqslant\sigma^p\lambda^pP(\mu<\infty)$$

$$=\sigma^p\lambda^pP(f^*>\lambda)\qquad(2.6.6)$$

因此在 $\{\upsilon=n,\sigma=\infty\}$ 上 $f_n^*>\beta\lambda$，$\sum_{i=1}^{n}\|u_idf_i\|^p\leqslant(\delta\lambda)^p$. 此时存在 k_0：$1\leqslant k_0\leqslant n$，使得

$$\sum_{i=1}^{n}u_idf_i=f_n-f_{k_0}=f_n-f_{k_0-1}-df_{k_0}$$

并且

$$\sup_n\left\|\sum_{i=1}^{\infty}u_idf_i\right\|\geqslant f_n^*-\|f_{k_0-1}\|-\|df_{k_0}\|\geqslant(\beta-\delta-1)\lambda$$

n 是任意的，故有

$$\left\{f^*>\beta\lambda,\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|df_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\delta\lambda\right\}\subset\left\{\widetilde{f}^*\geqslant(\beta-\delta-1)\lambda\right\}$$

于是由公式(2.6.5)和(2.6.6)得

$$P\left(f^*>\beta\lambda,\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|df_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\delta\lambda\right)$$

$$\leqslant P\left(\widetilde{f}^*\geqslant(\beta-\delta-1)\lambda\right)$$

$$\leqslant\frac{C}{(\beta-\delta-1)^p\lambda^p}\sum_{n=1}^{\infty}E\|u_ndf_n\|^p$$

$$\leqslant\frac{C\delta^p}{(\beta-\delta-1)^p}P(f^*>\lambda)$$

记 $\varepsilon=\dfrac{C\delta^p}{(\beta-\delta-1)^p}$，则

$$P(f^*>\beta\lambda)\leqslant P\left(\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|df_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\geqslant\delta\lambda\right)+$$

$$P\left(f^*>\beta\lambda,\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|df_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\delta\lambda\right)$$

$$\leqslant P\left(\left(\sum_{i=1}^{\infty}E\|df_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\geqslant\delta\lambda\right)+\varepsilon P(f^*>\lambda)$$

$$(2.6.7)$$

于是

$$E(f^*)^p=\beta^pp\int_0^\infty\lambda^{p-1}P(f^*>\beta\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

$$\leqslant\beta^pp\int_0^\infty\lambda^{p-1}P\left(\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|df_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\geqslant\delta\lambda\right)\mathrm{d}\lambda+$$

$$\varepsilon\beta^pp\int_0^\infty\lambda^{p-1}P(f^*>\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

$$\leqslant\frac{\beta^p}{\delta^p}E\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|df_i\|^p\right)+\varepsilon\beta^pE(f^*)^p$$

取 β 使 $\varepsilon\beta^p<1$，则

$$E(f^*)^p\leqslant\frac{\beta^p}{\delta^p(1-\varepsilon\beta^p)}E\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|df_i\|^p\right)\qquad(2.6.8)$$

从而

$$\sup_nE(\|f_n\|^p)\leqslant CE\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|df_i\|^p\right)$$

其中：$C=\dfrac{\beta^p}{\delta^p(1-\varepsilon\beta^p)}$. 故 X 是 p 一致可光滑的. □

二、鞅差序列的大数定律与 p 一致光滑性

关于 p 一致光滑空间中鞅差序列的极限定理研究和讨论的结果已经有许多，包含鞅差序列加权和的收敛性、随机和的收敛性、完全收敛性，以及完全收敛意义下的大数定律，某些鞅型序列的大数定律等. 这里仅介绍一类最基本的结论，它是由 Hoffmann－Jϕrgensen，Pisier 在 1976 年所证明的.

定理 2.6.3 设 $1<p\leqslant 2$，X 是 Banach 空间，则下列条件等价：

(i) X 是 p 一致可光滑空间；

(ii) 对于任何 X 值鞅 $f=(f_n)$，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}E(\|df_n\|^p)<\infty$，则 $\dfrac{1}{n}f_n\to 0$, a.e.；

(iii) 对于任何 X 值鞅 $f=(f_n)$，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}E(\|df_n\|^p)\in L_\infty$，则 $\dfrac{1}{n}f_n\to 0$, a.e.；

(iv) 在(ii)或(iii)的条件下，$\dfrac{1}{n}f_n\to 0$ 依概率成立.

将其中的鞅换为 WP 鞅，其结论仍然成立.

证明 (ii)⇒(iii)⇒(iv)是显然的，因此只需证明(i)⇒(ii)和(iv)⇒(i).

(i)⇒(ii) 设 $f=(f_n)$ 满足 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}E(\|df_n\|^p)<\infty$，定义 $d\tilde{f}_n=\dfrac{df_n}{n}$. 考虑鞅 $\tilde{f}=(\tilde{f}_n)$，$\tilde{f}_n=\sum\limits_{i=1}^{n}d\tilde{f}_n$，由于

$$\begin{aligned}\sup_n E\|\tilde{f}_n\|^p &\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}E\|d\tilde{f}_n\|^p\\ &=C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}E(\|df_n\|^p)<\infty\end{aligned}$$

而 p 一致光滑空间 X 具有 RNP，于是 $\tilde{f}_n$ 依 $L_p(P,X)$ 范数收敛，从而几乎处处收敛，由 Kronecker 引理知 $\dfrac{1}{n}f_n\to 0$, a.e..

(iv)⇒(i) 考虑 WP 鞅的两类空间：

$$G_0=\left\{f=(f_n):\|f\|=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}E\left(\|df_n\|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}}<\infty\right\}$$

$$G_1=\left\{f=(f_n):\rho(f,0)=\sup_n E\left(\frac{\|f_n\|}{n+\|f_n\|}\right)<\infty\right\}$$

可以验证 $\rho(f,g)=\rho(f-g,0)$ 是 G_1 上的度量，G_0，G_1 二者均是完备的，从而 G_0 是 Banach 空间，G_1 是 Fréchet 空间. 容易验证恒等映射 I：$G_0\to G_1$ 具有闭图像，从而是连续的. 于是 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得当 $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}E(\|df_n\|^p)\right)^{\frac{1}{p}}<\delta$ 时有

$$\sup_n P\left(\frac{\|f_n\|}{n}>\varepsilon\right)<\varepsilon \tag{2.6.9}$$

若 $f=(f_n)$ 满足 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}E\|df_n\|^p<\delta^p$，考虑由鞅差序列

$$(0,\cdots,0,(j+1)df_1,\cdots,(j+k)df_k,0,\cdots) \tag{2.6.10}$$

确定的鞅 $\tilde{f}=(\tilde{f}_n)$，由于

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^p}E(\|d\tilde{f}_n\|^p)=\sum_{i=1}^{\infty}E(\|df_n\|^p)<\delta^p$$

从而由(2.6.9)式得

$$P\left(\frac{\|\tilde{f}_{j+k}\|}{j+k}>\varepsilon\right)=P\left(\frac{1}{j+k}\|\sum_{i=1}^{k}(j+i)df_i\|>\varepsilon\right)<\varepsilon$$

令 $j\to\infty$ 得到

$$P(\|f_k\|>\varepsilon)=P(\|\sum_{i=1}^{k}df_i\|>\varepsilon)\leqslant\varepsilon$$

由此得到：若 $f^* \geqslant 1$，$a.e.$，则必 $\sum_{i=1}^{k} \| df_i \|^p \geqslant C^p > 0$，其中 $C > 0$ 是某个常数，由定理 2.6.2 中(iv)⇒(i)的证明知道必是 p 一致可光滑空间. □

三、极限鞅的 Brunk 型大数定律

作为鞅概念的推广，除了半鞅(即上鞅和下鞅)之外，1965 年 Fisk 定义了拟鞅. 随后，Chacon，Baxter，Bellow，Sucheston，Edgar 等人先后分别引入并研究了渐近鞅、一致渐近鞅、终鞅以及其他多种鞅型序列. 近年来，鞅型序列的研究取得了很大发展. 特别是 Banach 空间值鞅型序列，由于其概率性质与 Banach 空间几何性质之间存在着深刻的联系，从而更加引起人们广泛的关注和研究兴趣. 在众多鞅型序列当中，1973 年由 Mucci 定义的极限鞅，1970 年由 Blake 和 Mucci 定义的概率极限鞅和 L_1 极限鞅是要求条件较弱的一类鞅型序列.

1948 年，对于实值随机变量序列 Brunk 证明了当今被称之为 Brunk 型的强大数定律：设 $\{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$ 是零均值独立随机变量序列，若存在某个 $p \geqslant 2$，使得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E|\xi_n|^p}{n^{p/2+1}} < \infty$，则 $\{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$ 成立强大数定律. 1980 年，Woyczynski 首先对 Banach 空间值随机变量序列研究了 Brunk 型强大数定律，分别对 p 型空间值独立随机变量序列和 p 一致光滑空间值鞅差序列证明了 Brunk 型强大数定律. 这里将研究取值于 p 一致可光滑空间 X 的极限鞅、概率极限鞅和 L_1 极限鞅差序列的大数定律，分别对这三类鞅型序列的差序列建立 Brunk 型大数定律，其结论推广了 Woyczynski 的相应结果.

定义 2.6.1 设 $f = \{f_n\}_{n\geqslant 0}$ 是 X 值可积 $\{\mathscr{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ 适应的随机变量序列：

(1) 称 f 是极限鞅，如果

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{m\geqslant n} \| E(f_m \mid \mathscr{F}_n) - f_n \| = 0, \quad a.e. \qquad (2.6.11)$$

(2) 称 f 是概率极限鞅，如果 $\forall \varepsilon > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{m\geqslant n} P\left(\| E(f_m \mid \mathscr{F}_n) - f_n \| > \varepsilon \right) = 0 \qquad (2.6.12)$$

(3) 称 f 是 L_1 极限鞅，如果

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{m\geqslant n} E\left(\| E(f_m \mid \mathscr{F}_n) - f_n \| \right) = 0 \qquad (2.6.13)$$

下面首先给出 Woyczynski 在 1980 年对 Banach 空间值鞅差序列证明的一个 Brunk 型强大数定律，这里仅叙述结论而不证明.

引理 2.6.4(Woyczynski) 设 X 是 p 一致可光滑空间，$1 < p \leqslant 2$，对于 X 值鞅 $\xi = \{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$，若存在某个 $q \geqslant 1$，使得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E\| d\xi_n \|^{pq}}{n^{1+pq-q}} < \infty$，则 $\frac{1}{n}\xi_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} d\xi_k \to 0$，$a.e.$，$(n\to\infty)$.

引理 2.6.5 设 X 是 p 一致可光滑空间，$1 < p \leqslant 2$，对于 X 值鞅 $\xi = \{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$，若存在某个 $q \geqslant 1$，使得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E\| d\xi_n \|^{pq}}{n^{1+pq-q}} < \infty$，则 $\frac{1}{n}\xi_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} d\xi_k \xrightarrow{L_{pq}} 0\ (n\to\infty)$.

证明 若 $q = 1$，由 X 的 p 一致光滑性知，存在常数 $C > 0$，使得

$$E\left(\| \frac{\xi_n}{n} \|^{pq} \right) = \frac{1}{n^p} E\left(\| \sum_{k=1}^{n} d\xi_k \|^p \right) \leqslant C \frac{1}{n^p} \sum_{k=1}^{n} E\left(\| d\xi_k \|^p \right)$$

由引理条件并据 Kronecker 引理知 $\frac{1}{n^p}\sum_{k=1}^{n} E(\| d\xi_k \|^p) \to 0\ (n\to\infty)$，故 $E\left(\| \frac{\xi_n}{n} \|^p \right) \to 0\ (n\to\infty)$，即 $\frac{1}{n}\xi_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} d\xi_k \xrightarrow{L_p} 0\ (n\to\infty)$.

若 $q > 1$，由 X 的 p 一致光滑性并应用 Hölder 不等式得

$$\frac{1}{n^{pq}}E\|\xi_n\|^{pq}=\frac{1}{n^{pq}}E\|\sum_{k=1}^{n}d\xi_k\|^{pq}$$

$$\leqslant C\frac{1}{n^{pq}}E\left(\sum_{k=1}^{n}\|d\xi_k\|^{p}\right)^{pq/p}=C\frac{1}{n^{pq}}E\left(\sum_{k=1}^{n}\|d\xi_k\|^{p}\right)^{q}$$

$$=C\frac{1}{n^{pq}}E\left(\sum_{k=1}^{n}\left(k^p-(k-1)^p\right)^{\frac{q-1}{q}}\left(k^p-(k-1)^p\right)^{-\frac{q-1}{q}}\|d\xi_k\|^{p}\right)^{q}$$

$$\leqslant C\frac{1}{n^{pq}}E\left\{n^{p(q-1)}\sum_{k=1}^{n}\left(k^p-(k-1)^p\right)^{-(q-1)}\|d\xi_k\|^{pq}\right\}$$

$$=C\frac{1}{n^{p}}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(k^p-(k-1)^p\right)^{-(q-1)}E\|d\xi_k\|^{pq}\right\}\tag{2.6.14}$$

注意到，当 $1<p\leqslant 2$ 时，对一切 $q\geqslant 1$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}(n^p-(n-1)^p)^{-1}n^{p-1}=\frac{1}{p}<1$，从而，存在自然数 N，使得当 $k\geqslant N$ 时有 $\frac{(k^p-(k-1)^p)^{-(q-1)}}{k^p}\leqslant k^{-(1-q(p-1))}$. 于是由引理条件知

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}\left\{\left(k^p-(k-1)^p\right)^{-(q-1)}E\|d\xi_k\|^{pq}\right\}$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{E\|d\xi_k\|^{pq}}{k^{1+pq-q}}<\infty$$

据 Kronecker 引理得

$$\frac{1}{n^p}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(k^p-(k-1)^p\right)^{-(q-1)}E\|d\xi_k\|^{pq}\right\}\to 0\ (n\to\infty)\tag{2.6.15}$$

将(2.6.15)式代入(2.6.14)式得，$\frac{1}{n^{pq}}E(\|\xi_n\|^{pq})\to 0\ (n\to\infty)$，即 $\frac{1}{n}\xi_n\xrightarrow{L_{pq}}0\ (n\to\infty)$. □

引理 **2.6.6** 设 $f=\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ 是 X 值极限鞅(概率极限鞅或 L_1 极限鞅)，则存在分解 $f_n=\xi_n+\eta_n$，$n\geqslant 1$，其中 $\xi=\{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$ 是

X 值鞅，$\eta=\{\eta_n\}_{n\geqslant 1}$ 是 X 值极限鞅(概率极限鞅或 L_1 极限鞅)，且当 $n\to\infty$ 时，$\|d\eta_n\|=\|\eta_n-\eta_{n-1}\|\xrightarrow{a.e.}0$ ($\|d\eta_n\|\xrightarrow{P}0$ 或 $\|d\eta_n\|\xrightarrow{L_1}0$).

证明　对所有 $n\geqslant 1$，令

$$\xi_n=\sum_{k=1}^{n}\left(f_k-E(f_k\mid\mathscr{F}_{k-1})\right)$$

$$\eta_n=\sum_{k=1}^{n}\left(E(f_k\mid\mathscr{F}_{k-1})-f_{k-1}\right)$$

则 $f_n=\xi_n+\eta_n$，$n\geqslant 1$，且 $\xi=\{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$ 是 X 值鞅.

(1) 若 $f=\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ 是 X 值极限鞅，则显然 $\eta=\{\eta_n\}_{n\geqslant 1}$ 是 X 值极限鞅，并且由(2.6.11)式得

$$\lim_{n\to\infty}\|\eta_n-\eta_{n-1}\|$$

$$\leqslant\lim_{n\to\infty}\sup_{m\geqslant n-1}\|E(f_m\mid\mathscr{F}_{n-1})-f_{n-1}\|=0,\ a.e.$$

(2) 若 $f=\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ 是 X 值概率极限鞅，则显然 $\eta=\{\eta_n\}_{n\geqslant 1}$ 也是 X 值概率极限鞅，并且 $\forall\varepsilon>0$，据(2.6.12)式有

$$\lim_{n\to\infty}P(\|\eta_n-\eta_{n-1}\|>\varepsilon)$$

$$\leqslant\lim_{n\to\infty}\sup_{m\geqslant n-1}P(\|E(f_m\mid\mathscr{F}_{n-1})-f_{n-1}\|>\varepsilon)=0$$

(3) 若 $f=\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ 是 X 值 L_1 极限鞅，则显然 $\eta=\{\eta_n\}_{n\geqslant 1}$ 也是 X 值 L_1 极限鞅，且由(2.6.13)式得

$$\lim_{n\to\infty}E(\|\eta_n-\eta_{n-1}\|)$$

$$\leqslant\lim_{n\to\infty}\sup_{m\geqslant n-1}E(\|E(f_m\mid\mathscr{F}_{n-1})-f_{n-1}\|)=0$$ □

定理**2.6.7**　设 X 是 p 一致可光滑空间，$1<p\leqslant 2$，对于 X 值极限鞅 $f=\{f_n\}_{n\geqslant 1}$，若存在 $q\geqslant 1$，使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{E\|df_n\|^{pq}}{n^{1+pq-q}}<\infty$，则 $\frac{1}{n}f_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}df_k\to 0,\ a.e.\ (n\to\infty)$.

证明　由引理 2.6.6 知 $f=\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ 存在分解式 $f_n=\xi_n+\eta_n$，

$n \geqslant 1$，其中 $\xi = \{\xi_n\}_{n \geqslant 1}$ 是 X 值鞅，$\eta = \{\eta_n\}_{n \geqslant 1}$ 是 X 值极限鞅，且当 $n \to \infty$ 时，$\| d\eta_n \| \xrightarrow{a.e.} 0$. 由于

$$
\begin{aligned}
E(\| d\xi_n \|^{pq}) &= E(\| \xi_n - \xi_{n-1} \|^{pq}) \\
&= E(\| f_n - E(f_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) \|^{pq}) \\
&\leqslant E(\| f_n - f_{n-1} \| + E(\| f_n - f_{n-1} \| \mid \mathscr{F}_{n-1}))^{pq} \\
&\leqslant 2^{pq} E(\| f_n - f_{n-1} \|^{pq}) = 2^{pq} E(\| df_n \|^{pq})
\end{aligned}
$$

于是对于鞅 $\xi = \{\xi_n\}_{n \geqslant 1}$ 满足条件 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E\| d\xi_n \|^{pq}}{n^{1+pq-q}} < \infty$，得 $\frac{1}{n}\xi_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} d\xi_k \to 0$，$a.e.$ $(n \to \infty)$.

对于 X 值极限鞅 $\eta = \{\eta_n\}_{n \geqslant 1}$，根据引理 2.6.6 知 $\lim_{n \to \infty} \| d\eta_n \| = \lim_{n \to \infty} \| \eta_n - \eta_{n-1} \| = 0$，$a.e.$，于是 $\lim_{n \to \infty} \frac{\eta_n}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} d\eta_k = 0$，$a.e.$，从而证明了 $\frac{1}{n} f_n = \frac{1}{n}(\xi_n + \eta_n) \to 0$，$a.e.$ $(n \to \infty)$. □

定理 2.6.8 设 X 是 p 一致可光滑空间，$1 < p \leqslant 2$，对于 X 值 L_1 极限鞅 $f = \{f_n\}_{n \geqslant 1}$，若存在某个 $q \geqslant 1$，使得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E\| df_n \|^{pq}}{n^{1+pq-q}} < \infty$，则：

(1) $\frac{1}{n} f_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} df_k \xrightarrow{L_1} 0$ $(n \to \infty)$.

(2) 若另外 $\{E\| E(f_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) - f_{n-1} \|^{pq}\}_{n \geqslant 1}$ 关于 n 一致有界，则 $\frac{1}{n} f_n \xrightarrow{L_{pq}} 0$ $(n \to \infty)$.

证明 类似于定理 2.6.7 的证明，首先由引理 2.6.6 知，$f = \{f_n\}_{n \geqslant 1}$ 存在分解式 $f_n = \xi_n + \eta_n$，$n \geqslant 1$，其中 $\xi = \{\xi_n\}_{n \geqslant 1}$ 是 X 值鞅，$\eta = \{\eta_n\}_{n \geqslant 1}$ 是 X 值 L_1 极限鞅. 对于 X 值鞅 $\xi = \{\xi_n\}_{n \geqslant 1}$，据引理 2.6.4 得 $\frac{1}{n}\xi_n \xrightarrow{L_{pq}} 0$ $(n \to \infty)$. 而对于 L_1 极限鞅

$\eta = \{\eta_n\}_{n \geqslant 1}$，首先据引理 2.6.4 知 $d\eta_n \xrightarrow{L_1} 0$ $(n \to \infty)$. 从而

(1) 根据 Kronecker 引理得 $\frac{1}{n}\eta_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} d\eta_k \xrightarrow{L_1} 0$ $(n \to \infty)$，故 $\frac{1}{n} f_n = \frac{1}{n}(\xi_n + \eta_n) \xrightarrow{L_1} 0$ $(n \to \infty)$.

(2) 若另有 $\{\| d\eta_n \|_{L_{pq}}^{pq}\}_{n \geqslant 1} = \{E\| E(f_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) - f_{n-1} \|^{pq}\}_{n \geqslant 1}$ 关于 n 一致有界，故 $d\eta_n \xrightarrow{L_{pq}} 0$ $(n \to \infty)$，从而 $\frac{1}{n}\eta_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} d\eta_k \xrightarrow{L_{pq}} 0$ $(n \to \infty)$，即 $\frac{1}{n} f_n = \frac{1}{n}(\xi_n + \eta_n) \xrightarrow{L_{pq}} 0$ $(n \to \infty)$. □

定理 2.6.9 设 X 是 p 一致可光滑空间，$1 < p \leqslant 2$，对于 X 值概率极限鞅 $f = \{f_n\}_{n \geqslant 1}$，若存在 $q \geqslant 1$，使得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E\| df_n \|^{pq}}{n^{1+pq-q}} < \infty$，则 $\frac{1}{n} f_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} df_k \xrightarrow{P} 0$ $(n \to \infty)$.

证明 类似于定理 2.6.7 的证明，首先由引理 2.6.5 知，$f = \{f_n\}_{n \geqslant 1}$ 存在分解式 $f_n = \xi_n + \eta_n$，$n \geqslant 1$，其中 $\xi = \{\xi_n\}_{n \geqslant 1}$ 是 X 值鞅，$\eta = \{\eta_n\}_{n \geqslant 1}$ 是 X 值概率极限鞅. 对于 X 值鞅 $\xi = \{\xi_n\}_{n \geqslant 1}$，据引理 2.6.4 得 $\frac{1}{n}\xi_n \xrightarrow{L^{pq}} 0$ $(n \to \infty)$，从而 $\frac{1}{n}\xi_n \xrightarrow{P} 0$ $(n \to \infty)$.

而对于概率极限鞅 $\eta = \{\eta_n\}_{n \geqslant 1}$，据引理 2.6.5 知 $d\eta_n \xrightarrow{P} 0$ $(n \to \infty)$，根据 Kronecker 引理得 $\frac{1}{n}\eta_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} d\eta_k \xrightarrow{P} 0$ $(n \to \infty)$，从而 $\frac{1}{n} f_n = \frac{1}{n}(\xi_n + \eta_n) \xrightarrow{P} 0$ $(n \to \infty)$. □

第三章　鞅空间及其相互关系

从本章开始，将较系统地介绍 Banach 空间值的鞅空间理论．鞅空间及其相互关系是鞅的 H_p 理论中饶有兴趣的问题之一．作为经典(函数的) H_p 理论的一种推广，实值鞅的 H_p 理论自 20 世纪 70 年代以来，经过 Doob，Burkholder，Gundy，Davis，Garsia，Herz，Durrett，Weisz 以及龙瑞麟等学者的卓越工作而逐步得以建立．这些都已先后在 Garsia，Durrett，Weisz 和龙瑞麟等学者的专著中，分别从不同的侧重点出发进行了系统的总结．虽然对于 Banach 空间值鞅论的研究也早在 20 世纪 70 年代就已开始，但对于 Banach 空间值鞅的空间理论研究则只是近 10 来年的事情．与实值鞅的 H_p 空间理论相比，Banach 空间值鞅的 Hardy 空间理论尚不十分完善，还有许多有待深入研究的问题．但无论如何，现有的成果已经将鞅的 H_p 理论朝着无穷维空间取值的方向推进了一步．本书正是试图总结这些成果，正如书中将要看到的，鞅空间的许多性质都与鞅所取值的 Banach 空间的几何性质有着密切联系．

§3.1　鞅算子与鞅 Hardy 空间

如通常所知，鞅的均方算子 $S^{(2)}(f)$，条件均方算子 $\sigma^{(2)}(f)$ 以及极大算子 f^* 等，在实值鞅 H_p 理论中起着重要作用．但事实说明，在向量值情况讨论均方算子和条件均方算子是不适宜的．1990 年，刘培德首先对于 Banach 空间值鞅引入了 p－均方算子

$S^{(p)}(f)$ 和条件 p－均方算子 $\sigma^{(p)}(f)$，并且由此引入和讨论了 Banach 空间值鞅的各类空间．本节介绍几种基本的鞅算子和鞅 Hardy 空间．

设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 是完备概率空间，$(X,\|\cdot\|)$ 是 Banach 空间，设 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$ 是与 $\mathscr{F}$ 的某个递增子 σ 代数序列$(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 适应的 X 值鞅，记 $df=(df_n)_{n\geqslant 1}$ 为 f 的鞅差序列，其中 $df_n=f_n-f_{n-1}$，$n\geqslant 0$，$f_0\equiv 0$，$\mathscr{F}_0=\{\Omega,\Phi\}$．若 $0<p<\infty$，记

$$f_n^*=\sup_{i\leqslant n}\|f_i\|$$

$$f^*=\sup_{n\geqslant 0}f_n^*$$

$$S_n^{(p)}(f)=\Big(\sum_{i=1}^{n}\|df_i\|^p\Big)^{1/p}$$

$$S^{(p)}(f)=\sup_{n\geqslant 1}S_n^{(p)}(f)$$

$$\sigma_n^{(p)}(f)=\Big(\sum_{i=1}^{n}E(\|df_i\|^p\mid\mathscr{F}_{i-1})\Big)^{1/p}$$

$$\sigma^{(p)}(f)=\sup_{n\geqslant 1}\sigma_n^{(p)}(f)$$

当 $1<p<\infty$，$0<r\leqslant\infty$ 时，定义如下 X 值鞅 Hardy 空间：

$$H_r(X)=\{f=(f_n)_{n\geqslant 0}:\|f\|_{H_r(X)}=\|f^*\|_r<\infty\}$$

$${}_pH_r^S(X)=\{f=(f_n)_{n\geqslant 0}:\|f\|_{{}_pH_r^S(X)}=\|S^{(p)}(f)\|_r<\infty\}$$

$${}_pH_r^\sigma(X)=\{f=(f_n)_{n\geqslant 0}:\|f\|_{{}_pH_r^\sigma(X)}=\|\sigma^{(p)}(f)\|_r<\infty\}$$

设 $\lambda=(\lambda_n)_{n\geqslant 0}$ 是非负不减适应的随机变量序列，且 $\lambda_\infty=\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n$，定义

$$D_r(X)=\left\{\begin{aligned}&f=(f_n)_{n\geqslant 0}:\ \exists(\lambda_n),\\&\text{使得}\ \|f_n\|\leqslant\lambda_{n-1},\lambda_\infty\in L_r\end{aligned}\right\}$$

其中　$\|f\|_{D_r(X)}=\inf\|\lambda_\infty\|_r$

$${}_pQ_r(X)=\left\{\begin{aligned}&f=(f_n)_{n\geqslant 0}:\exists(\lambda_n),\\&\text{使得}\ S_n^{(p)}(f)\leqslant\lambda_{n-1},\lambda_\infty\in L_r\end{aligned}\right\}$$

其中　$\|f\|_{{}_pQ_r(X)}=\inf\|\lambda_\infty\|_r$

容易验证，当 $r\geqslant 1$ 时，$H_r(X)$，${}_pH_r^S(X)$，${}_pH_r^\sigma(X)$，$D_r(X)$

和 ${}_pQ_r(X)$ 是 Banach 空间，而当 $0<r<1$ 时，以上空间是拟 Banach 空间.

另外，设 $(A,\|\cdot\|_A)$ 和 $(B,\|\cdot\|_B)$ 为 Banach 空间或拟 Banach 空间，定义：

(i) $A\sim B$，若存在常数 $C_1>0$ 及 $C_2>0$，使得 $\forall f\in A\cap B$，有

$$C_1\|f\|_B\leqslant\|f\|_A\leqslant C_2\|f\|_B$$

(ii) $A\subset B$，若存在常数 $C>0$，使得 $\forall f\in A$，有

$$\|f\|_B\leqslant C\|f\|_A$$

在讨论以上各类鞅 Hardy 空间解析性质的过程中产生了许多其他重要的鞅空间，本书将在讨论它们时再一一引入.

§3.2 鞅空间的嵌入关系

本节分别讨论 ${}_pH_r^S(X)$ 与 ${}_pK_r(X)$，${}_pH_r^\sigma(X)$ 与 ${}_pK_r^+(X)$ 的相互嵌入关系，其结论与 Banach 空间的一致凸性和一致光滑性有密切联系. 类似的讨论还可以在更多的其他鞅空间中进行，这里只是以此为典型举例而已. 在实值鞅 H_p 理论中，当 $1\leqslant r<\infty$ 时，为了对鞅 Hardy 空间 ${}_2H_r^S(X)$ 和 ${}_2H_r^\sigma(X)$ 建立 Fefferman-Stein 的对偶理论，Garsia 在 1973 年引进了鞅空间 ${}_2K_r(X)$ 和 ${}_2K_r^+(X)$. 而对于 Banach 空间值鞅，空间 ${}_pK_r(X)$ 和 ${}_pK_r^+(X)$ 则是由刘培德在 1990 年所引入的，其定义分别如下：

$$ {}_pK_r(X)=\left\{\begin{array}{l} f=(f_n)_{n\geqslant0}:\ \exists\gamma\in L_r(\mathrm{R}),\ \gamma\geqslant0,\ 使得\\ E(\|f_m-f_{n-1}\|^p\mid\mathscr{F}_n)\leqslant E(\gamma^p\mid\mathscr{F}_n),\\ \forall 1\leqslant n\leqslant m<\infty \end{array}\right\} $$

$$(0<p\leqslant r\leqslant\infty,\ p\neq\infty),\qquad \|f\|_{{}_pK_r(X)}=\inf_\gamma\|\gamma\|_r$$

$$ {}_pK_r^+(X)=\left\{\begin{array}{l} f=(f_n)_{n\geqslant0}:\ \exists\gamma\in L_r(\mathrm{R}),\ \gamma\geqslant0,\ 使得\\ E(\|f_m-f_n\|^p\mid\mathscr{F}_n)\leqslant E(\gamma^p\mid\mathscr{F}_n),\\ \forall 0\leqslant n\leqslant m<\infty \end{array}\right\} $$

$$(0<p\leqslant r\leqslant\infty,\ p\neq\infty),\qquad \|f\|_{{}_pK_r^+(X)}=\inf_\gamma\|\gamma\|_r$$

定理 3.2.1 设 X 是 Banach 空间，$2\leqslant q\leqslant r<\infty$，则以下条件等价：

(i) X 是 q 一致可凸空间；

(ii) ${}_qK_r(X)\subset{}_qH_r^S(X)$，并且存在 $C=C_{q,r}>0$，使得对每个鞅 $f=(f_n)_{n\geqslant0}\in{}_qK_r(X)$ 成立

$$\|f\|_{{}_qH_r^S(X)}\leqslant C\|f\|_{{}_qK_r(X)}\tag{3.2.1}$$

(iii) ${}_qK_r^+(X)\subset{}_qH_r^\sigma(X)$，并且存在 $C=C_{q,r}>0$，使得对每个鞅 $f=(f_n)_{n\geqslant0}\in{}_qK_r^+(X)$ 成立

$$\|f\|_{{}_qH_r^\sigma(X)}\leqslant C\|f\|_{{}_qK_r^+(X)}\tag{3.2.2}$$

证明　假设 X 是 q 一致可凸空间，往证(3.2.1)式和(3.2.2)式. 首先设 $f=(f_n)_{n\geqslant0}\in{}_qK_r(X)$，并且 $\gamma\geqslant0$，$\gamma\in L_r$，使得

$$E\Big(\|f_m-f_{n-1}\|^q\mid\mathscr{F}_n\Big)\leqslant E\Big(\gamma^q\mid\mathscr{F}_n\Big),\qquad(0\leqslant n\leqslant m)\tag{3.2.3}$$

由 Pisier 不等式知，存在 $C>0$，使得

$$\begin{aligned}E\Big(\sum_{i=n}^m\|df_i\|^q\mid\mathscr{F}_n\Big)&\leqslant CE\Big(\|f_m-f_{n-1}\|^q\mid\mathscr{F}_n\Big)\\&\leqslant CE(\gamma^q\mid\mathscr{F}_n)\end{aligned}$$

所以

$$E\Big(\sum_{i=n}^\infty\|df_i\|^q\mid\mathscr{F}_n\Big)\leqslant CE(\gamma^q\mid\mathscr{F}_n)\tag{3.2.4}$$

若 $q=r$，在(3.2.4)式中取 $n=1$，则 $E\Big(\sum_{i=n}^\infty\|df_i\|^q\Big)\leqslant CE(\gamma^q)$ 或者 $\|S^{(q)}(f)\|^q\leqslant C\|\gamma\|_q$，由 $\|f\|_{{}_qK_r(X)}$ 的定义知(3.2.1)式成立. 若 $q<r$，对于任意的 $\alpha>0$，$\lambda>0$，定义停时

$$\tau_1 = \inf\{n;\ S_n^{(q)}(f) > \alpha\lambda\}$$

$$\tau_2 = \inf\{n;\ S_n^{(q)}(f) > (\alpha+1)\lambda\}$$

则 $\tau_1 \leqslant \tau_2$，$\{\tau_1 < \infty\} \in \mathscr{F}_{\tau_1} \subset \mathscr{F}_{\tau_2}$，并且

$$\left\{S_n^{(q)}(f) > (\alpha+1)\lambda\right\} = \{\tau_2 < \infty\}$$

$$\subset \{\tau_1 < \infty,\ S_{\tau_2}^{(q)}(f) - S_{\tau_1-1}^{(q)}(f) > (\alpha+1)^q\lambda^q - \alpha^q\lambda^q\}$$

$$= \left\{\tau_1 < \infty,\ \sum_{i=\tau_1}^{\tau_2} \| df_i \|^q > A^q\lambda^q\right\} \tag{3.2.5}$$

其中 $A^q = (\alpha+1)^q - \alpha^q$. 由(3.2.4)式、(3.2.5)式得出

$$P\Big(S^{(q)}(f) > (\alpha+1)\lambda\Big) \leqslant \frac{1}{A^q\lambda^q}\int_{\{\tau_1=\infty\}} \sum_{i=\tau_1}^{\tau_2} \| df_i \|^q \mathrm{d}P$$

$$= \frac{1}{A^q\lambda^q}\int_{\{\tau_1=\infty\}} E\Big(\sum_{i=\tau_1}^{\tau_2} \| df_i \|^q \mid \mathscr{F}_{\tau_1}\Big)\mathrm{d}P$$

$$\leqslant \frac{C}{A^q\lambda^q}\int_{\{S^{(q)}(f) > \alpha\lambda\}} \gamma^q \mathrm{d}P \tag{3.2.6}$$

于是

$$\| S^{(q)}(f) \| = (\alpha+1)^r\int_0^\infty P\Big(S^{(q)}(f) > (\alpha+1)\lambda\Big)\mathrm{d}\lambda^r$$

$$\leqslant \frac{C(\alpha+1)^r}{A^q}\int_0^\infty \lambda^{-q}\mathrm{d}\lambda^r\int_{\{S^{(q)}(f) > \alpha\lambda\}} \gamma^q\mathrm{d}P$$

$$= \frac{Cr(\alpha+1)^r}{A^q}\int_\Omega \gamma^q\mathrm{d}P\int^{\frac{S^{(q)}(f)}{\lambda}} \lambda^{r-q-1}\mathrm{d}\lambda$$

$$= \frac{Cr(\alpha+1)^r}{(r-q)A^q\alpha^{r-q}}\int_\Omega \gamma^q S^{(q)}(f)^{r-q}\mathrm{d}P$$

$$\leqslant (C')^q \| \gamma \|_r^q \| S^{(q)}(f) \|_r^{r-q}$$

从而 $\| S^{(q)}(f) \|_r \leqslant C' \| \gamma \|_r$，其中 C' 是仅依赖于 q 与 r 的常数，故(3.2.1)式成立.

为证(3.2.2)式，设 $f = (f_n)_{n\geqslant 0} \in {}_qK_r^+(X)$，由 ${}_qK_r^+(X)$ 的定义及 Pisier 不等式得到

$$E\Big(\sum_{i=n+1}^{\infty} E(\| df_i \|^q \mid \mathscr{F}_{i-1}) \mid \mathscr{F}_n\Big) \leqslant CE(\gamma^q \mid \mathscr{F}_n) \tag{3.2.7}$$

其中 $\gamma \geqslant 0$，$\gamma \in L_r$. 当 $q = r$ 时，(3.2.2)式显然成立. 当 $q < r$ 时，对于任意 $\alpha > 0$，$\lambda > 0$，仿照上面定义停时 τ_1，τ_2，将其中的 $S_n^{(q)}(f)$ 换成 $\sigma_{n+1}^{(q)}(f)$，则类似的讨论可以得出(3.2.2)式.

反过来，设 $f = (f_n)_{n\geqslant 0}$ 是 X 值鞅且 $\| f \|_q < \infty$. 若(3.2.1)或(3.2.2)式成立，则显然 $f \in {}_qK_r(X)$ 或 $f \in {}_qK_r^+(X)$.

从而由(3.2.1)式得出

$$\| S^{(q)}(f) \|_r \leqslant C \| f \|_{{}_qK_r(X)} \leqslant 2C \sup_n \| f_n \|_q < \infty$$

或者由(3.2.2)式得出

$$\| S^{(q)}(f) \|_q = \| \sigma^{(q)}(f) \|_q$$

$$\leqslant \| \sigma^{(q)}(f) \|_r \leqslant C \| f \|_{{}_qK_r^+(X)}$$

$$\leqslant 2C \sup_n \| f_n \|_q < \infty$$

总之有 $S^{(q)}(f) < \infty$，*a.e.*，据引理 2.5.1 知 X 是 q 一致可凸空间. □

定理 3.2.2 设 X 是 Banach 空间，$1 < p \leqslant 2$，$p \leqslant r < \infty$，则以下条件等价：

(i) X 是 p 一致可光滑空间；

(ii) ${}_pH_r^S(X) \subset {}_pK_r(X)$，并且存在 $C = C_{p,r} > 0$，使得对每个鞅 $f = (f_n)_{n\geqslant 0} \in {}_pH_r^S(X)$ 成立

$$\| f \|_{{}_pK_r(X)} \leqslant C \| f \|_{{}_pH_r^S(X)} \tag{3.2.8}$$

(iii) ${}_pH_r^\sigma(X) \subset {}_pK_r^+(X)$，并且存在 $C = C_{p,r} > 0$，使得对每个鞅 $f = (f_n)_{n\geqslant 0} \in {}_pH_r^\sigma(X)$ 成立

$$\| f \|_{{}_pK_r^+(X)} \leqslant C \| f \|_{{}_pH_r^\sigma(X)} \tag{3.2.9}$$

证明 假设 X 是 p 一致可光滑空间，往证(3.2.8)式. 为此，设 $f = (f_n)_{n\geqslant 0} \in {}_pH_r^S(X)$，应用定理 2.4.12，对任何 $0 \leqslant n \leqslant m$ 有

$$E(\| f_m - f_{n-1} \|^p \mid \mathscr{F}_n) \leqslant CE\Big(\sum_{i=n}^m \| df_i \|^p \mid \mathscr{F}_n\Big)$$

$$\leqslant CE(S^{(p)}(f)^p \mid \mathscr{F}_n) \qquad (3.2.10)$$

于是，取 $C' = C^{1/p}$，则有

$$\|f\|_{{}_pK_r(X)} \leqslant C'\|S^{(p)}(f)\|_r = C'\|f\|_{{}_pH_r^S(X)}$$

为证明(3.2.9)式，假设 $\sigma^{(p)}(f) \in L_r$，从而

$$E(\|f_m - f_n\|^p \mid \mathscr{F}_n) \leqslant CE\left(\sum_{i=n+1}^{m} \|df_i\|^p \mid \mathscr{F}_n\right)$$

$$\leqslant CE\left(\sum_{i=1}^{\infty} E(\|df_i\|^p \mid \mathscr{F}_{i-1}) \mid \mathscr{F}_n\right)$$

$$\leqslant CE\left(\sigma^{(p)}(f)^p \mid \mathscr{F}_n\right) \qquad (3.2.11)$$

于是

$$\|f\|_{{}_pK_r^+(X)} \leqslant C'\|\sigma^{(p)}(f)\|_r = C'\|f\|_{{}_pH_r^\sigma(X)}$$

反之，假定(3.2.8)式成立并且 $f \in {}_pH_r^S(X)$. 由 ${}_pK_r(X)$ 的定义，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\gamma \geqslant 0$，$\gamma \in L_r$，使得

$$E\left(\|f_m - f_{n-1}\|^p \mid \mathscr{F}_n\right) \leqslant E(\gamma^p \mid \mathscr{F}_n)$$

$$\|\gamma\|_r \leqslant \|f\|_{{}_pK_r(X)} + \varepsilon$$

取数学期望得

$$E\|f_m - f_{n-1}\|^p \leqslant E(\gamma^p)$$

$$\leqslant \left(\|f\|_{{}_pK_r(X)} + \varepsilon\right)^p$$

$$\leqslant \left(C\|f\|_{{}_pH_r^S(X)} + \varepsilon\right)^p$$

$$= \left(C\|S^{(p)}(f)\|_r + \varepsilon\right)^p$$

以 $\widetilde{f} = (\widetilde{f}_i)$ 代替 $f = (f_n)$，其中 $\widetilde{f}_i = f_{n+1+i} - f_{n-1}$ $(i \geqslant 0)$，可得

$$E\|f_m - f_{n-1}\|^p \leqslant \left(C\left\|\left(\sum_{i=n}^{\infty}\|df_i\|^p\right)^{1/p}\right\|_r + \varepsilon\right)^p$$

当 $n \to \infty$ 时，右端趋于零，Fatou 引理说明 f_n 为 L_p 收敛，从而 f_n 几乎处处收敛.

若(3.2.9)式成立并且 $f \in {}_pH_r^\sigma(X)$，可以证明同样的结论.

现在设 $S^{(p)}(f) \in L_\infty$，则 $f \in {}_pH_r^S(X)$，由以上讨论可知，f_n 几乎处处收敛，若 $\sigma^{(p)}(f) < \infty$, a.e.，定义停时

$$\tau_\lambda = \inf\{n;\ \sigma_{n+1}^{(p)}(f) > \lambda\}, \qquad (\lambda > 0)$$

则 $f^{(\tau_\lambda)} = (f_{\tau_\lambda \wedge n})$ 是鞅并且 $\sigma^{(p)}(f^{(\tau_\lambda)}) = \sigma_{\tau_\lambda}^{(p)}(f) \leqslant \lambda$. 所以 $f^{(\tau_\lambda)} \in {}_pH_r^\sigma(X)$ 并且 $f_{\tau_\lambda \wedge n}$ 几乎处处收敛. 但在集合 $\{\tau_\lambda = \infty\} = \{\sigma^{(p)}(f) \leqslant \lambda\}$ 上，$f_{\tau_\lambda \wedge n} = f_n$，从而 $\sigma^{(p)}(f) < \infty$, a.e.，得出 f_n 几乎处处收敛.

最后，假定 $f = (f_n)$ 是 Walsh − Paley 鞅，并且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}\|df_n\|^p \in L_\infty$，定义 $\widetilde{f}_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} df_i$，$\widetilde{f} = (\widetilde{f}_n)$，则 $S^{(p)}(\widetilde{f}) \in L_\infty$ 并且 $\|\sigma^{(p)}(\widetilde{f})\|_p = \|S^{(p)}(\widetilde{f})\|_p < \infty$. 因此，无论(3.2.8)式还是(3.2.9)式都能保证 $\sigma^{(p)}(\widetilde{f}) < \infty$, a.e.，由此可知 $\widetilde{f}_n$ 几乎处处收敛. 由 Kronecher 引理知，$\frac{1}{n}f_n \to 0$, a.e.，定理 2.6.3 说明 X 是 p 一致可光滑空间. □

根据以上两个定理，并应用 Kwapin 定理，立即可以得到下面的结论.

推论 3.2.1 设 X 是 Banach 空间，$2 \leqslant r < \infty$，则以下条件等价：

(i) X 同构于某个 Hilbert 空间；

(ii) ${}_2H_r^S(X) \sim {}_2K_r(X)$，并且存在 $C = C_r > 0$，使得对每个鞅 $f = (f_n)_{n \geqslant 0}$ 成立

$$C^{-1}\|f\|_{{}_2H_r^S(X)} \leqslant \|f\|_{{}_2K_r(X)} \leqslant C\|f\|_{{}_2H_r^S(X)}$$

(iii) ${}_2H_r^\sigma(X) \sim {}_2K_r^+(X)$，并且存在 $C = C_r > 0$，使得对每个鞅 $f = (f_n)_{n \geqslant 0}$ 成立

$$C^{-1}\|f\|_{{}_2H_r^\sigma(X)} \leqslant \|f\|_{{}_2K_r^+(X)} \leqslant C\|f\|_{{}_2H_r^\sigma(X)}$$

§3.3 Orlicz 鞅空间的嵌入关系

设 Φ: $[0, \infty) \to [0, \infty)$ 是单调增加的凸函数，$\Phi(0) = 0$，

当 $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\Phi(t)}{t}=\infty$ 时，称 Φ 为 Young 函数. 假定 $\varphi(t)=\Phi'(t)$ 是左连续的，Ψ 是 Φ 的补函数，记

$$p_\Phi=\sup_{t>0}\frac{t\Phi'(t)}{\Phi(t)},\qquad q_\Phi=\inf_{t>0}\frac{t\Phi'(t)}{\Phi(t)}$$

$L_\Phi(P,X)$ 是取值于 X 的可测函数的 Orlicz 空间，以 $\|\cdot\|_\Phi$ 记其范数. 对于 $1\leqslant p<\infty$，定义

$$\begin{aligned}{}_pL_\Phi=\{\varphi;\ &\varphi\text{ 实值可测且 }\|\varphi\|_{{}_pL_\Phi}\\&=\|\,|\varphi|^p\,\|_\Phi^{1/p}<\infty\}\end{aligned}$$

并且定义 X 值鞅的 Orlicz 空间如下：

$${}_pH_\Phi^S(X)=\{f=(f_n)_{n\geqslant0}:\|f\|_{{}_pH_\Phi^S(X)}=\|S^{(p)}(f)\|_{{}_pL_\Phi}<\infty\}$$

$${}_pH_\Phi^\sigma(X)=\{f=(f_n)_{n\geqslant0}:\|f\|_{{}_pH_\Phi^\sigma(X)}=\|\sigma^{(p)}(f)\|_{{}_pL_\Phi}<\infty\}$$

$${}_pK_\Phi(X)=\begin{Bmatrix}f=(f_n)_{n\geqslant0}:\ \exists\,\gamma\geqslant0,\ \gamma\in{}_pL_\Phi,\\ E\Big(\|f_m-f_{n-1}\|^p\mid\mathscr{F}_n\Big)\leqslant E(\gamma^p\mid\mathscr{F}_n),\\ \forall\,1\leqslant n\leqslant m<\infty\end{Bmatrix}$$

$$\text{并且 }\|f\|_{{}_pK_\Phi(X)}=\inf_\gamma\|\gamma\|_{{}_pL_\Phi}$$

$${}_pK_\Phi^+(X)=\begin{Bmatrix}f=(f_n)_{n\geqslant0}:\ \exists\,\gamma\geqslant0,\ \gamma\in{}_pL_\Phi,\\ E(\|f_m-f_n\|^p\mid\mathscr{F}_n)\leqslant E(\gamma^p\mid\mathscr{F}_n),\\ \forall\,0\leqslant n\leqslant m<\infty\end{Bmatrix}$$

$$\text{并且 }\|f\|_{{}_pK_\Phi^+(X)}=\inf_\gamma\|\gamma\|_{{}_pL_\Phi}$$

引理 **3.3.1** 设 Φ 是 Young 凸函数，$1<q_\Phi\leqslant p_\Phi<\infty$，$\xi$，$\eta$ 是非负随机变量，并且 $\forall\,\lambda>0$，有

$$\lambda P(\xi>\alpha\lambda)\leqslant\int_{\{\xi>\beta\lambda\}}\eta\,\mathrm{d}P$$

其中 $\alpha\geqslant\beta>0$，则存在 $C=C_{\alpha,\beta,\Phi}>0$ 使得

$$\|\xi\|_\Phi\leqslant C\|\eta\|_\Phi\tag{3.3.1}$$

定理 **3.3.2** 设 X 是 Banach 空间，$2\leqslant q\leqslant r<\infty$，Young 函数 Φ 满足 $1<q_\Phi\leqslant p_\Phi<\infty$，则以下条件等价：

(i) X 是 q 一致可凸空间；

(ii) ${}_qK_\Phi(X)\subset{}_qH_\Phi^S(X)$，并且存在 $C=C_{q,\Phi}>0$，使得对每个鞅 $f=(f_n)_{n\geqslant0}\in{}_qK_\Phi(X)$ 成立

$$\|f\|_{{}_qH_\Phi^S(X)}\leqslant C\|f\|_{{}_qK_\Phi(X)}\tag{3.3.2}$$

(iii) ${}_qK_\Phi^+(X)\subset{}_qH_\Phi^\sigma(X)$，并且存在 $C=C_{q,\Phi}>0$，使得对每个鞅 $f=(f_n)_{n\geqslant0}\in{}_qK_\Phi^+(X)$ 成立

$$\|f\|_{{}_qH_\Phi^\sigma(X)}\leqslant C\|f\|_{{}_qK_\Phi^+(X)}\tag{3.3.3}$$

证明　若 X 是 q 一致可凸空间，在引理 3.3.1 中以 λ^q，$S^{(q)}(f)$，$C\gamma^q$ 分别代替 λ，ξ，η，借助于(3.2.6)式和 Φ 的限制增长条件得出 $\|S^{(q)}(f)^q\|_\Phi\leqslant C\|\gamma^q\|_\Phi$，故(3.3.2)式成立；类似地，可以证明(3.3.3)式.

反过来，注意到定理 3.2.1 中的(ii)和(iii)分别是这里(ii)和(iii)的特例，故应用定理 3.2.1 即可得(ii)⇒(i)和(iii)⇒(i)成立. □

定理 **3.3.3** 设 X 是 Banach 空间，$1<p\leqslant2$，并且 Young 函数 Φ 满足 $1<q_\Phi\leqslant p_\Phi<\infty$，则以下条件等价：

(i) X 是 p 一致可光滑空间；

(ii) ${}_pH_\Phi^S(X)\subset{}_pK_\Phi(X)$，并且存在 $C=C_{p,\Phi}>0$，使得对每个鞅 $f=(f_n)_{n\geqslant0}\in{}_pH_\Phi^S(X)$ 成立

$$\|f\|_{{}_pK_\Phi(X)}\leqslant C\|f\|_{{}_pH_\Phi^S(X)}\tag{3.3.4}$$

(iii) ${}_pH_\Phi^\sigma(X)\subset{}_pK_\Phi^+(X)$，并且存在 $C=C_{p,\Phi}>0$，使得对每个鞅 $f=(f_n)_{n\geqslant0}\in{}_pH_\Phi^\sigma(X)$ 成立

$$\|f\|_{{}_pK_\Phi^+(X)}\leqslant C\|f\|_{{}_pH_\Phi^\sigma(X)}\tag{3.3.5}$$

证明　设 X 是 p 一致可光滑空间，若 $f=(f_n)_{n\geqslant0}\in{}_pH_\Phi^S(X)$，显然由(3.2.10)式得出

$$\|f\|_{{}_pK_\Phi(X)}\leqslant C\|CS^{(p)}(f)^p\|_\Phi^{1/p}\leqslant C\|f\|_{{}_pH_\Phi^S(X)}$$

此即(3.3.4)式. 类似可证明(3.3.5)式.

反过来，(ii)⇒(i)和(iii)⇒(i)，则只要取 $\Phi(t)=t^{\frac{r}{p}}\,(p\leqslant r<\infty)$，

应用定理 3.2.2 直接可得. □

第四章 鞅空间的原子分解

作为一种简洁而有力的分析工具，原子分解方法在调和分析和鞅论中有着十分重要的作用. 它不仅可以将单指标和多指标的情况统一处理，而且还可以提供许多通常情况难以处理问题的答案. 其基本思想是将所讨论的空间中的函数或鞅用一类具有很好性质的且十分简单的函数或鞅经过线性组合生成. 这种把空间"原子化"的研究方法深刻地影响了对函数空间、鞅空间与算子理论的研究，给分析数学带来了丰硕的成果. 函数 H_p 空间的原子分解是由 R. Coifman 于 1974 年首先发现并加以证明的，鞅的原子分解首先是由 Bermard 和 Muisonneuve 引入的. 最近，Weisz 发展了这一思想，并以此为工具研究了一系列实值鞅的不等式、鞅空间的对偶和内插问题. 而对于 Banach 空间值鞅 Hardy 空间的原子分解则最早是由刘培德和侯友良在 1998 年引入的. 本章将对一系列 Banach 空间值鞅空间建立原子分解定理. 与标量值鞅不同的是：在向量值情况下，鞅的原子分解的存在性与 Banach 空间的几何性质有着密切联系. 因此，其结果不仅为研究鞅空间的性质提供了有力工具，而且也为利用原子分解方法研究 Banach 空间几何学提供了方便.

§4.1 鞅 Hardy 空间的原子分解

从抽象调和分析的角度出发，联系于鞅的各类算子所构造出的一系列鞅 Hardy 空间无疑是鞅空间理论研究中所关注的重点.

因此,本章首先介绍及类 Banach 空间值鞅 Hardy 空间的原子分解定理,具体地说,这几种鞅 Hardy 空间是 ${}_pH_r^\sigma(X)$、${}_pQ_r(X)$ 和 $D_r(X)$.

首先,给出 Banach 空间中原子的概念.

定义 4.1.1 设 $0<r,s\leqslant\infty$,$1\leqslant p<\infty$,称 X 值可测函数 a 为 $(1,r,s;p)$(或 $(2,r,s;p)$,$(3,r,s)$)原子,若存在停时 τ,使得

(i) $a_n=E(a\mid\mathscr{F}_n)=0$, $\forall\, n\leqslant\tau$;

(ii) $\|\sigma^{(p)}(a)\|_s\leqslant P(\tau\neq\infty)^{\frac{1}{s}-\frac{1}{r}}$;

$\Big($或(ii′) $\|S^{(p)}(a)\|_s\leqslant P(\tau\neq\infty)^{\frac{1}{s}-\frac{1}{r}}$,

(ii″) $\|a^*\|_s\leqslant P(\tau\neq\infty)^{\frac{1}{s}-\frac{1}{r}}\Big)$.

为简便记,以下有时用 E_n 表示关于 $\mathscr{F}_n$ 的条件期望,$\mathbf{Z}$ 表示全体整数的集合.

定理 4.1.1 设 X 是 Banach 空间,$1<p\leqslant 2$,$0<r\leqslant 1$,则以下条件等价:

(i) X 是 p 一致可光滑空间;

(ii) ${}_pH_r^\sigma(X)$ 中的每个鞅 $f=(f_n)_{n\geqslant0}$ 存在分解

$$f_n=\sum_{k\in Z}\mu_kE_na^k,(n\geqslant 0)\tag{4.1.1}$$

使得

$$\|f\|_{{}_pH_r^\sigma(X)}\sim\inf\Big(\sum_{k\in Z}\mu_k^r\Big)^{1/r}\tag{4.1.2}$$

这里 a^k 是 $(1,r,\infty;p)$ 原子,$k\in Z$,并且 $\sup\limits_{k\in Z}\|a^{k*}\|_r<\infty$,$(\mu_k)_{k\in Z}$ 是非负实数列,$(\mu_k)\in l_r$. 公式(4.1.2)中的"inf"是对 f 的所有如上的原子分解取的,此时 $\sum\limits_{k\in Z}\mu_ka^k$ 在 ${}_pH_r^\sigma(X)$ 中收敛于 f.

证明 (i)⇒(ii) 设 $f=(f_n)_{n\geqslant0}\in{}_pH_r^\sigma(X)$. 对任意 $k\in Z$,定义停时

$$\tau_k=\inf\{n\geqslant0:\sigma_{n+1}^{(p)}>2^k\},\ \inf\Phi=\infty$$

$\tau_k\uparrow\infty$. 考虑停止鞅 $f^{(\tau_k)}=(f_{\tau_k\wedge n})_{n\geqslant0}$,有

$$\begin{aligned}&\sum_{k\in Z}(f_n^{(\tau_{k+1})}-f_n^{(\tau_k)})\\&=\sum_{k\in Z}\Big[\sum_{m=0}^n\chi_{\{m\leqslant\tau_{k+1}\}}df_m-\sum_{m=0}^n\chi_{\{m\leqslant\tau_k\}}df_m\Big]\\&=\sum_{m=0}^n\sum_{k\in Z}(\chi_{\{m\leqslant\tau_{k+1}\}}-\chi_{\{m\leqslant\tau_k\}})df_m\\&=f_n\end{aligned}\tag{4.1.3}$$

对于任意的 $k\in Z$,$n\geqslant0$,定义

$$\mu_k=3\times2^kP(\tau_k<\infty)^{1/r},\qquad a_n^k=\frac{1}{\mu_k}(f_n^{(\tau_{k+1})}-f_n^{(\tau_k)})$$

(当 $\mu_k=0$ 时,令 $a_n^k=0$)

易知对于每一个 $k\in Z$,$a^k=(a_n^k)_{n\geqslant0}$ 是 X 值鞅,并且由 $\sigma^{(p)}(f^{(\tau_k)})=\sigma_{\tau_k}^{(p)}(f)\leqslant 2^k$ 知

$$\begin{aligned}\sigma^{(p)}(a^k)&=\Big(\sum_{n=0}^\infty E_{n-1}\|da_n^k\|^p\Big)^{1/p}\\&=\frac{1}{\mu_k}\Big(\sum_{n=0}^\infty E_{n-1}\|df_n^{(\tau_{k+1})}-df_n^{(\tau_k)}\|^p\Big)^{1/p}\\&\leqslant\frac{1}{\mu_k}(\sigma^{(p)}(f^{(\tau_{k+1})})+\sigma^{(p)}(f^{(\tau_k)}))\\&\leqslant\frac{1}{\mu_k}(2^{k+1}+2^k)\\&\leqslant P(\tau_k<\infty)^{-1/r}\end{aligned}\tag{4.1.4}$$

根据 X 的 p 一致光滑性,引用 Pisier 不等式得到

$$\|a^{k*}\|_p\leqslant C\|\sigma^{(p)}(a^k)\|_p\leqslant CP(\tau_k<\infty)^{-1/r}$$

于是 $(a_n^k)_{n\geqslant0}$ 是 $L_p(X)$ 有界鞅. 因为 p 一致可光滑空间具有 Radon-Nikodym 性质,故 a_n^k 几乎处处收敛,仍以 a^k 记其极限,则 $E_na^k=a_n^k$,$n\geqslant0$. 由 a_n^k 的定义知,当 $n\leqslant\tau_k$ 时,$a_n^k=0$. 由(4.1.4)式得 $\|\sigma^{(p)}(a^k)\|_\infty\leqslant P(\tau_k<\infty)^{-1/r}$,这说明 a^k 是

$(1,r,\infty;p)$ 原子，并且

$$\sum_{k\in Z}\mu_k a_n^k=\sum_{k\in Z}\left(f_n^{(\tau_{k+1})}-f_n^{(\tau_k)}\right)$$

$$=\sum_{k\in Z}\left(\sum_{m=0}^{n}I_{\{m\leqslant\tau_{k+1}\}}df_m-\sum_{m=0}^{n}I_{\{m\leqslant\tau_k\}}df_m\right)$$

$$=\sum_{m=0}^{n}\sum_{k\in Z}\left(I_{\{m\leqslant\tau_{k+1}\}}-I_{\{m\leqslant\tau_k\}}\right)df_m$$

$$=f_n,\qquad \forall\ n\geqslant 0$$

(4.1.1)式得证．显然在 $\{\tau_k=\infty\}$ 上，$a^{k*}=0$，$\sigma^{(p)}(a^k)=0$．应用 Hölder 不等式得

$$E(a^{k*})^r=E(a^{k*}I_{\{\tau_k<\infty\}})^r$$

$$\leqslant C(E\sigma^{(p)}(a^k)^pI_{\{\tau_k<\infty\}})^{r/p}P(\tau_k<\infty)^{1-r/p}\leqslant C \tag{4.1.5}$$

于是 $\sup\limits_{k\in Z}\|a^{k*}\|_r<\infty$．下面估计 $\sum\limits_{k\in Z}\mu_k^r$，一方面有

$$\sum_{k\in Z}\mu_k^r=3^r\sum_{k\in Z}2^{kr}P(\tau_k<\infty)$$

$$=3^r\sum_{k\in Z}2^{kr}P\left(\sigma^{(p)}(f)^r>2^{kr}\right)$$

$$=\frac{3^r}{2^r-1}\sum_{k\in Z}\left(2^{(k+1)r}-2^{kr}\right)P\left(\sigma^{(p)}(f)^r>2^{kr}\right)$$

$$=\frac{3^r}{2^r-1}\sum_{k\in Z}2^{kr}P(2^{(k-1)r}<\sigma^{(p)}(f)^r\leqslant 2^{kr})$$

$$\leqslant\frac{2^r3^r}{2^{r-1}}E(\sigma^{(p)}(f)^r)$$

$$=\frac{2^r3^r}{2^{r-1}}\|f\|_{{}_pH_r^\sigma(X)} \tag{4.1.6}$$

或者从倒数第二步有

$$\sum_{k\in Z}\mu_k^r\geqslant\frac{3^r}{2^r-1}E(\sigma^{(p)}(f)^r)$$

$$=\frac{3^r}{2^r-1}\|f\|_{{}_pH_r^\sigma(X)} \tag{4.1.7}$$

关于所有如此的原子分解取下确界即得到(4.1.2)式．此外由 (a_n^k) 的定义知

$$f-\sum_{k=l}^{m}\mu_k^r=f-f^{(\tau_{m+1})}+f^{(\tau_l)}$$

由于 $f\in{}_pH_r^\sigma(X)$ 时，$\sigma^{(p)}(f)<\infty$，a.e.，于是

$$\tau_{m+1}\to\infty,\ a.e.\ (m\to\infty)$$

从而

$$\sigma^{(p)}(f-f^{(\tau_{m+1})})^r=(\sigma^{(p)}(f)^p-\sigma^{(p)}(f^{(\tau_{m+1})})^p)^{\frac{r}{p}}$$

$$\to 0,\ a.e.\ (m\to\infty)$$

又 $\sigma^{(p)}(f-f^{(\tau_{m+1})})^r\leqslant\sigma^{(p)}(f)^r$，后者可积．由控制收敛定理知 $\|f-f^{(\tau_{m+1})}\|_{{}_pH_r^\sigma(X)}=E(\sigma^{(p)}(f-f^{(\tau_{m+1})})^r)\to 0$，$(m\to\infty)$ 另一方面 $\sigma^{(p)}(f^{(\tau_l)})\leqslant 2^l$，故知 $\lim\limits_{l\to-\infty}\|f^{(\tau_l)}\|_{{}_pH_r^\sigma(X)}=0$．总之，

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ l\to-\infty}}\|f-\sum_{k=l}^{m}\mu_k^r\|_{{}_pH_r^\sigma(X)}=0.$$

(ii)⇒(i) 设鞅 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$ 满足 $E\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|df_n\|^p=E\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}E(\|df_n\|^p\mid\mathscr{F}_{n-1})\right)<\infty$，由于

$$E(\sigma^{(p)}(f)^r)\leqslant(E(\sigma^{(p)}(f)^p))^{\frac{r}{p}}$$

$$=\left[E\sum_{n=1}^{\infty}\|df_n\|^p\right]^{\frac{r}{p}}<\infty$$

故 $f\in{}_pH_r^\sigma(X)$．设 f_n 有(ii)中的原子分解，注意 $\sup\limits_k E\|a^{k*}\|^r<\infty$，$(\mu_k)\in l_r$．因而

$$E\|f_m-f_n\|^r\leqslant E\sum_{k\in Z}\mu_k^r\|a_m^k-a_n^k\|^r$$

$$\leqslant C\sum_{|k|>k_0}\mu_k^r+C\sum_{k\in Z}\mu_k^r\left(\sup_{|k|\leqslant k_0}E\|a_m^k-a_n^k\|\right)^r$$

(4.1.8)

a^k 是相应的原子，故在 $L_1(X)$ 中，$a_n^k \to a^k$，$k \in Z$，$n \to \infty$. (4.1.8)式说明 $f = (f_n)_{n \geqslant 0}$ 是 $L_r(X)$ 中的 Cauchy 序列. 换言之，f_n 依概率收敛，这说明 X 同构于 p 一致光滑空间. □

注*：实际上(i)⇒(ii)对 $0 < r < \infty$ 都成立，因为(4.1.5)式在此情形下依然成立. 实际上对于 $0 < r \leqslant p$，(4.1.5)式仍然成立. 此外，有 $E(\sigma^{(p)}(a^k)^r) = E(\sigma^{(p)}(a^k)\chi_{\{\tau_k < \infty\}})^r \leqslant 1$. 于是当 $r \geqslant p$ 时，利用 X 的 p 一致光滑性得到 $E(a^{k*})^r \leqslant CE(\sigma^{(p)}(a^k)^r) \leqslant C$.

定理 4.1.2 设 X 是 Banach 空间，$1 < p \leqslant 2$，$0 < r \leqslant 1$，则以下条件等价：

(i) X 同构于 p 一致光滑空间；

(ii) ${}_pQ_r(X)$ 中的每个鞅 $f = (f_n)_{n \geqslant 0}$ 存在分解

$$f_n = \sum_{k \in Z} \mu_k E_n a^k, (n \geqslant 0) \tag{4.1.9}$$

并且

$$\| f \|_{{}_pQ_r(X)} \sim \inf\Big(\sum_{k \in Z} \mu_k^r\Big)^{1/r} \tag{4.1.10}$$

这里 a^k 是 $(2, r, \infty; p)$ 原子，$k \in Z$，并且 $\sup\limits_{k \in Z} \| a^{k*} \|_r < \infty$，$(\mu_k)_{k \in Z}$ 是非负实数列，$(\mu_k) \in l_r$. (4.1.10)式中的"inf"是对 f 的所有如上的原子分解取的，此时 $\sum\limits_{k \in Z} \mu_k a^k$ 在 ${}_pQ_r(X)$ 中收敛于 f.

证明 (i)⇒(ii) 设 $f = (f_n)_{n \geqslant 0} \in {}_pQ_r(X)$. (λ_n) 是与 $(\mathscr{F}_n)$ 适应的非负不减随机变量序列，$S_n^{(p)}(f) \leqslant \lambda_{n-1}$，$\lambda_\infty \in L_r$. 令

$$\tau_k = \inf\{n \geqslant 0 : \lambda_n > 2^k\}$$

μ_k，a_n^k 如定理 4.1.1 证明中一样，则 $a^k = (a_n^k)_{n \geqslant 0}$ 是 X 值鞅，并且

$$S^{(p)}\Big(f^{(\tau_k)}\Big) = S_{(\tau_k)}^{(p)}(f) \leqslant \lambda_{\tau_k - 1} \leqslant 2^k$$

类似于上面(4.1.4)式的证明得到

$$S^{(p)}(a^k) \leqslant P(\tau_k < \infty)^{-\frac{1}{r}}$$

由 X 的 p 一致光滑性和 Pisier 不等式得

$$\sup_n \| a_n^k \|_p \leqslant \| a^{k*} \|_p \leqslant C \| S^{(p)}(a^k) \|_p \leqslant CP(\tau_k < \infty)^{-\frac{1}{r}}$$

于是存在 $L_p(X)$ 中函数，仍记为 a^k，使得 $a_n^k = E_n(a^k)$，$n \geqslant 1$. 同样的验证表明，a^k 是 $(2, r, \infty; p)$ 原子，$\sup\limits_k \| a^{k*} \|_r < \infty$，并且(4.1.9)式成立. 类似于(4.1.6)式，有

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in Z} \mu_k^r &= 3^r \sum_{k \in Z} 2^{kr} P(\tau_k < \infty) \\
&= 3^r \sum_{k \in Z} 2^{kr} P(S^{(p)}(f) > 2^k) \\
&\leqslant \frac{2^r 3^r}{2^r - 1} E(S^{(p)}(f)^r) \\
&\leqslant \frac{2^r 3^r}{2^r - 1} E(\lambda_\infty^r)
\end{aligned} \tag{4.1.11}$$

另一方面，类似于(4.1.7)式，有

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in Z} \mu_k^r &= 3^r \sum_{k \in Z} 2^{kr} P(\lambda_\infty > 2^k) \\
&\geqslant \frac{3^r}{2^r - 1} E(\lambda_\infty^r)
\end{aligned} \tag{4.1.12}$$

综合(4.1.11)式和(4.1.12)式得(4.1.10)式. 对于最后的论断，首先

$$\begin{aligned}
& S^{(p)}(f - f^{(\tau_{m+1})}) \\
&= \sum_{k=m+1}^{\infty} \Big(S^{(p)}(f^{(\tau_{k+1})})^p - S^{(p)}(f^{(\tau_k)})^p\Big) \\
&= \sum_{k=m+1}^{\infty} S^{(p)}\Big(f^{(\tau_{k+1})} - f^{(\tau_k)}\Big)^p \\
&= \sum_{k=m+1}^{\infty} \mu_k^p S^{(p)}(a^k)^p
\end{aligned} \tag{4.1.13}$$

令 $\rho_{n,k} = \| S^{(p)}(a^k) \|_\infty \chi_{\{\tau_k \leqslant n\}}$，$\rho_n = \Big[\sum\limits_{k=m+1}^{\infty} \mu_k^p \rho_{n,k}^p\Big]^{\frac{1}{p}}$，则 $(\rho_n)_{n \geqslant 0}$ 是适应非降随机变量序列. 由(4.1.13)式得出 $S_n^{(p)}(f - f^{(\tau_{m+1})}) \leqslant \rho_{n-1}$，由于 $0 < r \leqslant 1$，故

$$\rho_n^r \leqslant \sum_{k=m+1}^{\infty} \mu_k^r \chi_{\{\tau_k \leqslant n\}} \| S^{(p)}(a^k) \|_\infty^r$$

$$\leqslant \sum_{k=m+1}^{\infty} \mu_k^r \chi_{\{\tau_k \leqslant n\}} P(\tau_k < \infty)^{-1} \tag{4.1.14}$$

由此式和类似于(4.1.11)式的不等式得到

$$E(\rho_{\infty}^r) \leqslant \sum_{k=m+1}^{\infty} \mu_k^r \leqslant CE(S^{(p)}(f)^r - S_m^{(p)}(f)^r)$$

从而

$$\| f - f^{(\tau_{m+1})} \|_{{}_pQ_r(X)} \leqslant CE(S^{(p)}(f)^r - S_m^{(p)}(f)^r) \to 0 \ (m \to \infty)$$

又 $\| f^{(\tau_l)} \|_{{}_pQ_r(X)} \leqslant 2^l \to \infty \ (l \to -\infty)$. 最终得出

$$\lim_{\substack{m \to \infty \\ l \to -\infty}} \| f - \sum_{k=l}^{m} \mu_k a^k \|_{{}_pQ_r(X)} = 0$$

(ii)⇒(i) 设 $f = (f_n)_{n \geqslant 0}$ 是 X 值鞅，$S^{(p)}(f) \in L_\infty$，则 $f \in {}_pQ_r(X)$. 若 $f_n = \sum_{k \in Z} \mu_k E_n a^k, (n \geqslant 0)$ 是 f 相应的原子分解，类似于定理 4.1.1(ii)⇒(i)的证明知，(f_n) 依概率收敛. 从而 X 是 p 一致可光滑空间. □

定理 **4.1.3** 设 X 是 Banach 空间，$0 < r \leqslant 1$，则以下条件等价：

(i) X 具有 RN 性质；

(ii) $D_r(X)$ 中的每个鞅 $f = (f_n)_{n \geqslant 0}$ 存在分解

$$f_n = \sum_{k \in Z} \mu_k E_n a^k, (n \geqslant 0) \tag{4.1.15}$$

并且

$$\| f \|_{D_r(X)} \sim \inf(\sum_{k \in Z} \mu_k^r)^{1/r} \tag{4.1.16}$$

这里 a^k 是 $(3, r, \infty)$ 原子，$k \in Z$，$(\mu_k)_{k \in Z}$ 是非负实数列，$(\mu_k) \in l_r$. (4.1.16)式中的“inf”是对 f 的所有如上的原子分解取的，此时 $\sum_{k \in Z} \mu_k a^k$ 在 $D_r(X)$ 中收敛于 f.

证明 (i)⇒(ii) 设 $f = (f_n)_{n \geqslant 0} \in D_r(X)$. (λ_n) 是与 $(\mathscr{F}_n)$ 适应的非负不减随机变量序列，$\| f_n \| \leqslant \lambda_{n-1}$，$\lambda_\infty \in L_r$. 定义 τ_k，

μ_k 和 a_n^k 同定理 4.1.2，则对任意 $n \geqslant 0$，有

$$\| a_n^k \| = \mu_k^{-1} \| f^{(\tau_{k+1})} - f^{(\tau_k)} \|$$
$$\leqslant \mu^{-1}(2^{k+1} + 2^k) \leqslant P(\tau_k < \infty)^{-\frac{1}{r}}$$

由此得 $\| a^{k*} \|_\infty \leqslant P(\tau_k < \infty)^{-\frac{1}{r}}$. 因为 X 具有 RN 性质，故存在 X 值可积函数 a^k，使得 $a_n^k = E_n(a^k)$，$n \geqslant 1$. 当 $n \leqslant \tau_k$ 时，$a_n^k = 0$，从而 a^k 是 $(3, r, \infty)$ 原子并且(4.1.15)式成立. 类似于定理 4.1.2 中(4.1.10)式的证明可得(4.1.16)式. 现在令

$$\lambda_n^r = \sum_{k=m+1}^{\infty} \mu_k^r \chi_{\{\tau_k \leqslant n\}} \| a^k \|_\infty^r$$

则 $(\lambda_n)_{n \geqslant 0}$ 是适应非降随机变量序列，并且

$$\| f_n - f_n^{(\tau_{m+1})} \|^r \leqslant \sum_{k=m+1}^{\infty} \mu_k^r \| a_n^k \|^r$$
$$\leqslant \sum_{k=m+1}^{\infty} \mu_k^r \chi_{\{\tau_k \leqslant n-1\}} \| a_n^k \|^r$$
$$\leqslant \lambda_{n-1}^r \tag{4.1.17}$$

由 $\| a^k \|_\infty \leqslant P(\tau_k < \infty)^{-\frac{1}{r}}$ 得到

$$E(\lambda_\infty^r) \leqslant \sum_{k=m+1}^{\infty} \mu_k^r$$
$$\leqslant 3^r \sum_{k=m+1}^{\infty} 2^{kr} P(f^* > 2^k)$$
$$\leqslant \frac{6^r}{2^r - 1} \int_{\{f^* > 2^{m+1}\}} (f^*)^r \mathrm{d}P \tag{4.1.18}$$

由(4.1.17)式得知 $\| f - f^{(\tau_{m+1})} \|_{D_r(X)} \leqslant \| \lambda_\infty \|_r$. 再由(4.1.18)式得出 $\| f - f^{(\tau_{m+1})} \|_{D_r(X)} \to 0 \ (m \to \infty)$. 又 $\| f^{(\tau_l)} \|_{D_r(X)} \leqslant 2^l \to 0 \ (l \to -\infty)$. 于是

$$\lim_{\substack{m \to \infty \\ l \to -\infty}} \| f - \sum_{k=l}^{m} \mu_k a^k \|_{D_r(X)} = 0$$

(ii)⇒(i) 设 $f = (f_n)_{n \geqslant 0}$ 是 X 值鞅，当 $\sup_n \| f_n \|_\infty < \infty$ 时，

$f \in D_r(X)$，f 存在形如(4.1.15)式的原子分解．由原子的定义知，$E(a^{k*})^r = E(a^{k*})^r \chi_{\{\tau_k<\infty\}} \leqslant 1$，从而 $\sup\limits_n \| a^{k*} \|_r \leqslant 1$. 类似于定理 4.1.1(ii)⇒(i)的证明知，(f_n) 依概率收敛，由控制收敛定理可知，(f_n) 依 L_1 范数收敛．从而 X 具有 RN 性质． □

注*：定理 4.1.2 和 4.1.3 中(i)⇒(ii)的关系对于 $0<r<\infty$ 也成立.

定理 **4.1.4** 设 X 是 Banach 空间，$1<p\leqslant 2$，$0<r\leqslant 1$，则以下条件等价：

(i) X 是 p 一致可光滑空间；

(ii) ${}_pH_r^\sigma(X)$ 中的每个鞅 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$ 存在分解

$$f_n = \sum_{k\in Z} \mu_k E_n a^k, \qquad (n \geqslant 0) \tag{4.1.19}$$

并且

$$\Big[\sum_{k\in Z} \mu_k^r\Big]^{1/r} \leqslant C \| f \|_{{}_pH_r^\sigma(X)} \tag{4.1.20}$$

这里 a^k 是 $(3,r,p)$ 原子，$k\in Z$，$(\mu_k)_{k\in Z}$ 是非负实数列，$(\mu_k)\in l_r$.

证明 (i)⇒(ii) 设 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}\in {}_pH_r^\sigma(X)$. 对任意 $k\in Z$，定义

$$F_k = \left\{\sigma^{(p)}(f) > 2^k\right\}$$

$$\tau_k = \inf\{n\geqslant 0: 2E_n(\chi_{F_k}) > 1\}, \qquad \inf\varnothing = \infty$$

并且令

$$\mu_k = Cp(p-1)^{-1} 2^{\frac{1}{p}} 2^{k+1} P(\tau_k<\infty)^{\frac{1}{r}}$$

$$a_n^k = \frac{1}{\mu_k}(f_n^{(\tau_{k+1})} - f_n^{(\tau_k)})$$

其中 C 是 Pisier 不等式中的常数．易知 τ_k 是单调增加的，$a^k=(a_n^k)_{n\geqslant 0}$ 是值鞅．由于 X 的 p 一致可光滑性，Doob 不等式和 Pisier 不等式给出

$$E(a^{k*})^p \leqslant \left[\frac{p}{p-1}\right]^p \sup_n E(\| a_n^k \|^p)$$

$$= \left[\frac{p}{p-1}\right]^p \sup_n \frac{E(\| f_n^{(\tau_{k+1})} - f_n^{(\tau_k)} \|^p)}{\mu_k^p}$$

$$= \left[\frac{p}{p-1}\right]^p \frac{1}{\mu_k^p} C^p E(\sigma^{(p)}(f^{(\tau_{k+1})} - f^{(\tau_k)})^p)$$

$$= C^p \left[\frac{p}{p-1}\right]^p \frac{1}{\mu_k^p} E\Big[\sum_{n=1}^\infty E_{n-1} \| df_n \|^p \chi_{\{\tau_k<n\leqslant\tau_{k+1}\}}\Big] \tag{4.1.21}$$

但

$$E\Big[\sum_{n=0}^\infty E_{n-1} \| df_n \|^p \chi_{\{\tau_k<n\leqslant\tau_{k+1}\}}\Big]$$

$$= E\Big[\sum_{n=0}^\infty E_{n-1} \| df_n \|^p \chi_{\{\tau_k<n\leqslant\tau_{k+1}\}} \chi_{\{\sigma^{(p)}(f)\leqslant 2^{k+1}\}}\Big] +$$

$$E\Big[\sum_{n=0}^\infty E_{n-1} \| df_n \|^p \chi_{\{\tau_k<n\leqslant\tau_{k+1}\}} \chi_{\{\sigma^{(p)}(f)> 2^{k+1}\}}\Big]$$

$$\leqslant 2^{(k+1)p} P(\tau_k<\infty) + \sum_{n=0}^\infty E\big(E_{n-1} \| df_n \|^p \chi_{\{\tau_k<n\leqslant\tau_{k+1}\}} E_{n-1}\chi_{F_{k+1}}\big)$$

$$\leqslant 2^{(k+1)p} P(\tau_k<\infty) + \frac{1}{2} E\Big[\sum_{n=0}^\infty E_{n-1} \| df_n \|^p \chi_{\{\tau_k<n\leqslant\tau_{k+1}\}}\Big]$$

从而 $E\Big[\sum\limits_{n=0}^\infty E_{n-1} \| df_n \|^p \chi_{\{\tau_k<n\leqslant\tau_{k+1}\}}\Big] \leqslant 2\cdot 2^{(k+1)p} P(\tau_k<\infty)$，(4.1.21)式变为 $E(a^{k*})^p \leqslant P(\tau_k<\infty)^{1-\frac{p}{r}}$. 于是 $(a_n^k)_{n\geqslant 0}$ 是 $L_p(X)$ 有界鞅．因为 X 具有 Radon-Nikodym 性质，故 a_n^k 几乎处处收敛，仍以 a^k 记其极限，则 $E_n a^k = a_n^k$，$n\geqslant 0$．由 a_n^k 的定义知，当 $n\leqslant \tau_k$ 时，$a_n^k = 0$．这说明 a^k 是 $(3,r,p)$ 原子．由 a^k 的定义得到(4.1.19)式．为证(4.1.20)式，只需注意对于适当的常数 C_p，

$$\sum_{k\in Z} \mu_k^r = C_p \sum_{k\in Z} 2^{kr} P(\tau_k<\infty)$$

$$\leqslant C_p \sum_{k\in Z} 2^{kr} P(2\sup_n (E_n \chi_{F_k}>1))$$

$$\leqslant C_p \sum_{k\in Z} 2^{kr} P(F_k)$$

$$= C_p \sum_{k\in Z} 2^{kr} P\left(\sigma^{(p)}(f) > 2^k\right)$$

$$\leqslant C_p \| f \|^r_{{}_pH^\sigma_r(X)}$$

(ii)⇒(i) 注意到对于 $(3, r, p)$ 原子 a 有 $\| a^* \| \leqslant P(\tau < \infty)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}$. 利用 Hölder 不等式得

$$E(a^*)^r = E(a^{*r}\chi_{\{\tau<\infty\}})$$

$$\leqslant (Ea^{*p})^{\frac{r}{p}} P(\tau<\infty)^{1-\frac{r}{p}} \leqslant 1$$

由此，类似于定理 4.1.1(ii)⇒(i)的证明可知，若 X 值鞅 $f = (f_n)$ 满足 $E(\sum_{n=0}^{\infty} \| df_n \|^p) < \infty$，则 (f_n) 依概率收敛. 从而 X 是 p 一致可光滑空间. □

定理 **4.1.5** 设 X 是 Banach 空间，$2\leqslant q<\infty, 0<r\leqslant q$，则以下条件等价：

(i) X 是 q 一致可凸空间；

(ii) $D_r(X)$ 中的每个鞅 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$ 存在分解

$$f_n = \sum_{k\in Z} \mu_k E_n a^k, \qquad n\geqslant 0 \tag{4.1.22}$$

使得

$$\| f \|_{D_r(X)} \sim \inf\left(\sum_{k\in Z}\mu_k^r\right)^{1/r} \tag{4.1.23}$$

这里 a^k 是 $(3,r,\infty)$ 原子，$k\in Z$，$\sup_{k\in Z} \| \sigma^{(q)}(a^k) \|_r < \infty$，$(\mu_k)_{k\in Z}$ 是非负实数列，$(\mu_k) \in l_r$，此时 $\sum_{k\in Z}\mu_k a^k$ 在 $D_r(X)$ 中收敛于 f.

证明 (i)⇒(ii) 设 $f=(f_n)_{n\geqslant 0} \in D_r(X)$，$\lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 0}$ 是相应于定义中的非负增加适应 R. V. 序列. 对任意 $k\in Z$，定义 $\tau_k = \inf\{n\geqslant 0: \lambda_{n+1} > 2^k\}$，则 $\tau_k \uparrow \infty\ (k\to\infty)$. 令

$$\mu_k = 3\times 2^k P(\tau_k<\infty)^{1/r}$$

$$a_n^k = \mu_k^{-1}(f_n^{(\tau_{k+1})} - f_n^{(\tau_k)})$$

于是 $f_n = \sum_{k\in Z}(f_n^{(\tau_{k+1})} - f_n^{(\tau_k)}) = \sum_{k\in Z}\mu_k a_n^k$. 显然 $(a_n^k)_{n\geqslant 0}$ 是鞅，并且

$$\| a_n^k \| \leqslant \mu_k^{-1} \| f_n^{(\tau_{k+1})} - f_n^{(\tau_k)} \|$$

$$\leqslant \mu_k^{-1}(\lambda_{\tau_{k+1}} + \lambda_{\tau_k}) \leqslant P(\tau_k<\infty)^{-1/r}$$

因为 q 一致凸空间具有 Radon-Nikodym 性质，由 $\sup_n \| a_n^k \|_{L_q(X)} \leqslant P(\tau_k<\infty)^{-1/r}$ 知，存在函数 a^k，使得 $E_n a^k = a_n^k$，$n\geqslant 0$. 特别地，$\| a^{k*} \| \leqslant \sup_n \| a_n^k \| \leqslant P(\tau_k<\infty)^{-1/r}$，并且 $a_n^k\chi_{\{n\leqslant\tau_k\}} = 0$，故 a^k 是 $(3,r,\infty)$ 原子. 由 X 的 q 一致凸性，应用 Hölder 不等式得

$$\| \sigma^{(q)}(a^k) \|_r^r = E(\sigma^{(q)}(a^k)\chi_{\{\tau_k<\infty\}})_r$$

$$\leqslant C(E(a^{k*})^q\chi_{\{\tau_k<\infty\}})^{r/q} P(\tau_k<\infty)^{1-r/q} \leqslant C$$

于是 $\sup_{k\in Z} \| \sigma^{(q)}(a^k) \|_r < \infty$. 现在估计 $\sum_{k\in Z}\mu_k^r$，一方面

$$\sum_{k\in Z}\mu_k^r = 3^r\sum_{k\in Z}2^{kr}P(\tau_k<\infty)$$

$$\leqslant \frac{6^r}{2^r-1}E(\lambda_\infty^r) = C_1 \| f \|^r_{D_r(X)}$$

另一方面

$$\sum_{k\in Z}\mu_k^r = \frac{3^r}{2^r-1}\sum_{k\in Z}2^{kr}P(2^{(k-1)r}\leqslant\lambda_\infty^r < 2^{kr})$$

$$\geqslant \frac{3^r}{2^r-1}E(\lambda_\infty^r) = C_2 \| f \|^r_{D_r(X)}$$

关于所有如上的原子分解取下确界即得到(4.1.23)式. 有关级数 $\sum_{k\in Z}\mu_k a^k$ 在 $D_r(X)$ 中的收敛性，可类似于定理 4.1.3 中的相应部分证明，此处从略. □

(ii)⇒(i) 设 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$ 为 X 值 Walsh-Paley 鞅，满足 $\sup \| f_n \|_\infty < \infty$. 显然 $f=(f_n)_{n\geqslant 0} \in D_q(X)$，故 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$ 存在(ii)中的 $(3,q,\infty)$ 类的原子分解，且满足(4.1.12)式和(4.1.23)式. 于是

$$\| \sigma^{(q)}(f) \|_q^q \leqslant \left(\sum_{k\in Z}\mu_k^q\right) \| \sigma^{(q)}(a^k) \|_q^q$$

$$\leqslant C \| \sigma^{(q)}(a^k) \|_q^q \| f \|^q_{D_q(X)} < \infty$$

从而 $\|S^{(q)}(f)\|_q=\|\sigma^{(q)}(f)\|_q<\infty$，$S^{(q)}(f)<\infty$，$a.e.$ 这说明 X 是 q 一致可凸空间. □

§4.2 平削算子生成的鞅空间的原子分解

在调和分析中，作为 Hardy-Littlewood 极大算子概念的发展，函数的平削算子(也称♯算子)是由 Fefferman 和 Stein 引入的. 1973 年，Garsia 将之推广到实值鞅，1990 年，刘培德和龙瑞麟将之推广到 Banach 空间值鞅. 由此生成的一系列鞅空间是刻画鞅 Hardy 空间的共轭以及研究空间和算子内插问题的有力工具. 对于实值鞅，空间 ${}_2K_r$ 和 ${}_2K_r^+$ 最早由 Garsia 引入，用于刻画实值鞅 Hardy 空间的共轭. 而对于 Banach 空间值鞅，空间 ${}_pK_r(X)$、${}_pK_r^+(X)$、${}_pK_r^S(X)$ 和 ${}_pK_r^\sigma(X)$ 是由作者引入的，利用它们刻画了一系列 Banach 空间值鞅 Hardy 空间的共轭空间(详见第六章). 这些空间都联系于鞅的某种平削算子，对它们的形式稍加改变. 本节对一系列由平削算子生成的 Banach 空间值鞅空间 ${}_p\overline{K}_r(X)$、${}_p\overline{K}_r^+(X)$、${}_p\overline{K}_r^S(X)$ 和 ${}_p\overline{K}_r^\sigma(X)$，当 $0<r\leqslant p$ 时，建立了原子分解定理.

设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 是完备概率空间，$(X,\|\cdot\|)$ 是 Banach 空间，$f=(f_n)_{n\geqslant 0}$ 是与 $\mathscr{F}$ 的某个递增子 σ 代数序列 $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 适应的 X 值鞅，$df=(df_n)_{n\geqslant 0}$ 为 f 的鞅差序列，其中 $df_n=f_n-f_{n-1}$，$n\geqslant 0$，$f_{-1}\equiv 0$. 若 $0<p<\infty$，定义鞅 f 的几类平削函数分别为：

$$T^+_{p,n}(f)=\sup_{m\geqslant n}\Big(E(\|f_m-f_n\|^p\mid\mathscr{F}_n)\Big)^{1/p}$$

$$T^+_p(f)=\sup_{n\geqslant 0}T^+_{p,n}(f)$$

$$T_{p,n}(f)=\sup_{m\geqslant n}\Big(E(\|f_m-f_{n-1}\|^p\mid\mathscr{F}_n)\Big)^{1/p}$$

$$T_p(f)=\sup_{n\geqslant 0}T_{p,n}(f)$$

$$T^\sigma_{p,n}(f)=\Big(E((\sigma^{(p)}(f)-\sigma^{(p)}_n(f))^p\mid\mathscr{F}_n)\Big)^{1/p}$$

$$T^\sigma_p(f)=\sup_{n\geqslant 0}T^\sigma_{p,n}(f)$$

$$T^S_{p,n}(f)=\Big(E((S^{(p)}(f)-S^{(p)}_{n-1}(f))^p\mid\mathscr{F}_n)\Big)^{1/p}$$

$$T^S_p(f)=\sup_{n\geqslant 0}T^S_{p,n}(f)$$

设 $1<p<\infty$，$0<r\leqslant p$，本节将讨论如下由平削函数生成的 X 值鞅空间：

$${}_p\overline{K}^+_r(X)=\{f=(f_n):\|f\|_{{}_p\overline{K}^+_r(X)}=\|T^+_p(f)\|_r<\infty\}$$

$${}_p\overline{K}_r(X)=\{f=(f_n):\|f\|_{{}_p\overline{K}_r(X)}=\|T_p(f)\|_r<\infty\}$$

$${}_p\overline{K}^\sigma_r(X)=\{f=(f_n):\|f\|_{{}_p\overline{K}^\sigma_r(X)}=\|T^\sigma_p(f)\|_r<\infty\}$$

$${}_p\overline{K}^S_r(X)=\{f=(f_n):\|f\|_{{}_p\overline{K}^S_r(X)}=\|T^S_p(f)\|_r<\infty\}$$

定理 4.2.1 设 X 是 Banach 空间，$2\leqslant q<\infty$，$0<r\leqslant q$，则以下条件等价：

(i) X 是 q 一致可凸空间；

(ii) ${}_q\overline{K}^+_r(X)$ 中的每个鞅 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$ 存在分解

$$f_n=\sum_{K\in Z}\mu_kE_na^k,\ n\geqslant 0\tag{4.2.1}$$

使得

$$\|f\|_{{}_q\overline{K}^+_r(X)}\sim\inf\Big(\sum_{k\in Z}\mu_k^r\Big)^{1/r}\tag{4.2.2}$$

这里 a^k 是 $(3,r,q)$ 原子，$k\in Z$，并且 $\sup\limits_{k\in Z}\|\sigma^{(q)}(a^k)\|_r<\infty$，$(\mu_k)_{k\in Z}$ 是非负实数列，$(\mu_k)\in l_r$.

证明 (i)⇒(ii) 设 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}\in{}_q\overline{K}^+_r(X)$，则有

$$\Big(E(\|f_m-f_n\|^q\mid\mathscr{F}_n)\Big)^{1/q}\leqslant T^+_{q,n}(f),\qquad\forall\,0\leqslant n\leqslant m<\infty$$

于是

$$\Big(E(\|f_{n+1}\|^q\mid\mathscr{F}_n)\Big)^{1/q}\leqslant T^+_{q,n}(f)+\|f_n\|,\qquad\forall\ n\geqslant 1\tag{4.2.3}$$

取 $p=q/(q-1)$，对任意 $k\in Z$，定义

$$\tau_k=\inf\{n\geqslant 0:T^+_{q,n}(f)+\|f_n\|>2^k\}$$

$$\mu_k = 3p \times 2^k P(\tau_k < \infty)^{1/r}$$
$$a_n^k = \mu_k^{-1}(f_n^{(\tau_{k+1})} - f_n^{(\tau_k)})$$

从而 $\| a_n^k \| \leqslant \mu_k^{-1}(\| f_n^{(\tau_{k+1})} \| + \| f_n^{(\tau_k)} \|)$，有

$$\begin{aligned}
\| a_n^k \|_q &= (E \| a_n^k \|^q \chi_{\{\tau_k<\infty\}})^{1/q} \\
&\leqslant \mu_k^{-1} \{ [E \| f_n^{(\tau_{k+1})} \|^q \chi_{\{\tau_k<\infty\}}]^{1/q} + \\
&\quad [E \| f_n^{(\tau_k)} \|^q \chi_{\{\tau_k<\infty\}}]^{1/q} \} \\
&\leqslant \mu_k^{-1} \{ [E(E(\| f_n^{(\tau_{k+1})} \|^q \mid \mathscr{F}_{\tau_k}) \chi_{\{\tau_k<\infty\}})]^{1/q} + \\
&\quad [E(E(\| f_n^{(\tau_k)} \|^q \mid \mathscr{F}_{\tau_k-1}) \chi_{\{\tau_k-1<\infty\}})]^{1/q} \} \\
&\leqslant \mu_k^{-1}(2^{k+1} + 2^k) P(\tau_k < \infty)^{1/q} \\
&\leqslant \frac{1}{p} P(\tau_k < \infty)^{1/q-1/r}
\end{aligned}$$

于是 $(a_n^k)_{n\geqslant 0}$ 是 $L_p(X)$ 有界鞅. 因为 q 一致凸空间具有 Radon-Nikodym 性质，故 a_n^k 几乎处处收敛，仍以 a^k 记其极限，则 $E_n a^k = a_n^k$，$n \geqslant 0$. 由 a_n^k 的定义知，当 $n \leqslant \tau_k$ 时，$a_n^k = 0$. 由 Doob 不等式得

$$\| a^{k*} \|_q \leqslant p \| a^k \|_q \leqslant P(\tau_k < \infty)^{1/q-1/r}$$

这说明 a^k 是 $(3,r,q)$ 原子. 由 X 的 q 一致凸性，并应用 Hölder 不等式得

$$\| \sigma^{(q)}(a^k) \|_r^r \leqslant C \| a^{k*} \|_q^r P(\tau_k < \infty)^{1-r/q} \leqslant C$$

故 $\sup\limits_{k\in Z} \| \sigma^{(q)}(a^k) \|_r < \infty$.

下面估计 $\sum\limits_{k\in Z} \mu_k^r$，一方面有

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in Z} \mu_k^r &= (3p)^r \sum_{k\in Z} 2^{kr} P(\tau_k < \infty) \\
&\leqslant (3p)^r \sum_{k\in Z} 2^{kr} P\left(2^r((T_q^+(f))^r + (f^*)^r) > 2^{kr}\right) \\
&\leqslant \frac{(6p)^r}{2^r - 1} \left(2^r \left(E(T_q^+(f))\right)^r + 2^r \left(E(f^*)\right)^r\right) \\
&\leqslant \frac{(12p)^r (p^r + 1)}{2^r - 1} \| f \|^r_{{}_q\overline{K}_r^+(X)}
\end{aligned}$$

$$\leqslant C_1 \| f \|^r_{{}_q\overline{K}_r^+(X)} \tag{4.2.4}$$

上面最后一个不等式是因为 $\| f^* \|_r \leqslant \| f^* \|_q \leqslant p \| f \|_q \leqslant p \| T_q^+(f) \|_r$. 另一方面，有

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in Z} \mu_k^r &= (3p)^r \sum_{k\in Z} 2^{kr} P(\tau_k < \infty) \\
&= (3p)^r \sum_{k\in Z} 2^{kr} P\left((T_q^+(f) + f^*)^r > 2^{kr}\right) \\
&\geqslant (3p)^r \sum_{k\in Z} 2^{kr} P\left((T_q^+(f))^r > 2^{kr}\right) \\
&\geqslant \frac{(3p)^r}{2^r - 1} \| T_q^+(f) \|_r^r \\
&= C_2 \| f \|_{{}_q\overline{K}_r^+(X)}
\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

关于所有如上的原子分解取下确界，则由(4.2.4)式和(4.2.5)式得到(4.2.2)式.

(ii)⇒(i)　设 $f = (f_n)_{n\geqslant 0}$ 为 X 值 Walsh-Paley 鞅，满足 $\sup \| f_n \|_\infty < \infty$. 显然 $f = (f_n)_{n\geqslant 0} \in {}_q\overline{K}_q^+(X)$，故 $f = (f_n)_{n\geqslant 0}$ 存在(ii)中的 $(3,q,q)$ 类的原子分解，且满足(4.2.1)式和(4.2.2)式. 于是

$$\begin{aligned}
\| \sigma^{(q)}(f) \|_q^q &\leqslant \left(\sum_{k\in Z} \mu_k^q\right) \| \sigma^{(q)}(a^k) \|_q^q \\
&\leqslant C \| \sigma^{(q)}(a^k) \|_q^q \| f \|^q_{{}_qK_q^+(X)} < \infty
\end{aligned}$$

从而 $\| S^{(q)}(f) \|_q = \| \sigma^{(q)}(f) \|_q < \infty$，$S^{(q)}(f) < \infty$，$a.e.$ 这说明 X 是 q 一致可凸空间. □

定理 4.2.2　设 X 是 Banach 空间，$2 \leqslant q < \infty$，$0 < r \leqslant q$，则以下条件等价：

(i) X 是 q 一致可凸空间；

(ii) ${}_q\overline{K}_r(X)$ 中的每个鞅 $f = (f_n)_{n\geqslant 0}$ 存在分解

$$f_n = \sum_{k\in Z} \mu_k E_n a^k, n \geqslant 0$$

使得

$$\|f\|_{{}_q\bar{K}_r^+(X)} \sim \inf\Big(\sum_{k\in Z}\mu_k^r\Big)^{1/r}$$

这里 a^k 是 $(3,r,q)$ 原子，$k\in Z$，并且 $\sup\limits_{k\in Z}\|S^{(q)}(a^k)\|_r<\infty$，$(\mu_k)_{k\in Z}$ 是非负实数列，$(\mu_k)\in l_r$.

证明 (i)⇒(ii) 设 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}\in{}_q\overline{K}_r(X)$，则有

$$(E(\|f_m-f_{n-1}\|^q\mid\mathscr{F}_n))^{1/q}\leqslant T_{q,n}(f),\qquad \forall\, 1\leqslant n\leqslant m<\infty$$

于是

$$(E(\|f_{n+1}\|^q\mid\mathscr{F}_n))^{1/q}\leqslant T_{q,n}(f)+\|f_{n-1}\|,\qquad \forall\ n\geqslant 1$$

取 $p=q/(q-1)$，对任意 $k\in Z$，定义

$$\tau_k=\inf\{n\geqslant 0:\ T_{q,n}^+(f)+\|f_{n-1}\|>2^k\}$$

$$\mu_k=3p\times 2^kP(\tau_k<\infty)^{1/r}$$

$$a_n^k=\mu_k^{-1}(f_n^{(\tau_{k+1})}-f_n^{(\tau_k)})$$

其余证明与定理 4.2.1 类似，此处从略. □

定理 **4.2.3** 设 X 是 Banach 空间，$1<p\leqslant 2$，$0<r\leqslant p$，则以下条件等价：

(i) X 是 p 一致可光滑空间；

(ii) ${}_p\overline{K}_r^\sigma(X)$ 中的每个鞅 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$ 存在分解：

$$f_n=\sum_{k\in Z}\mu_kE_na^k,\ n\geqslant 0\qquad(4.2.6)$$

使得

$$\|f\|_{{}_p\bar{K}_r^\sigma(X)}\sim\inf\Big(\sum_{k\in Z}\mu_k^r\Big)^{1/r}\qquad(4.2.7)$$

这里 a^k 是 $(1,r,\infty;p)$ 原子，$a^k\in L_p(X)$，$(k\in Z)$，并且 $\sup\limits_{k\in Z}\|a^{k*}\|_r<\infty$，$(\mu_k)_{k\in Z}$ 是非负实数列，$(\mu_k)\in l_r$. (4.2.7)式中的“inf”是对 f 的所有如上的原子分解取的，此时 $\sum\limits_{k\in Z}\mu_ka^k$ 在 ${}_p\overline{K}_r^\sigma(X)$ 中收敛于 f.

证明 (i)⇒(ii) 设 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}\in{}_p\overline{K}_r^\sigma(X)$，注意到 $\sigma_{n+1}^{(p)}(f)$ 关于 $\mathscr{F}_n$ 可测，则有

$$\sigma_{n+1}^{(p)}(f)=\Big(E(\sigma_{n+1}^{(p)}(f)^p\mid\mathscr{F}_n)\Big)^{1/p}$$

$$=\Big(E(\sigma_{n+1}^{(p)}(f)^p-\sigma_n^{(p)}(f)^p\mid\mathscr{F}_n)+E(\sigma_n^{(p)}(f)^p\mid\mathscr{F}_n)\Big)^{1/p}$$

$$\leqslant T_{p,n}^\sigma(f)+\sigma_n^{(p)}(f)$$

对任意 $k\in Z$，定义停时、实数列和原子如下：

$$\tau_k=\inf\{n\geqslant 0:\ T_{p,n}^\sigma(f)+\sigma_n^{(p)}(f)>2^k\}$$

$$\mu_k=3\times 2^kP(\tau_k<\infty)^{1/r},\quad a_n^k=\mu_k^{-1}(f_n^{(\tau_{k+1})}-f_n^{(\tau_k)})$$

从而

$$\begin{aligned}\sigma^{(p)}(a^k)&=\Big(\sum_{n=1}^\infty E_{n-1}\|da_n^k\|^p\Big)^{1/p}\\&=\frac{1}{\mu_k}\Big(\sum_{n=1}^\infty E_{n-1}\|df_n^{(\tau_{k+1})}-df_n^{(\tau_k)}\|^p\Big)^{1/p}\\&\leqslant\frac{1}{\mu_k}(\sigma^{(p)}(f^{(\tau_{k+1})})+\sigma^{(p)}(f^{(\tau_k)}))\\&\leqslant\frac{1}{\mu_k}(2^{k+1}+2^k)\\&\leqslant P(\tau_k<\infty)^{-1/r}\end{aligned}\qquad(4.2.8)$$

由 X 的 p 一致光滑性，得到 $\|a^{k*}\|_p\leqslant C\|\sigma^{(p)}(a^k)\|_p\leqslant CP(\tau_k<\infty)^{-1/r}$. 于是 $(a_n^k)_{n\geqslant 0}$ 是 $L_p(X)$ 有界鞅. 因为 p 一致光滑空间具有 Radon-Nikodym 性质，故 a_n^k 几乎处处收敛. 仍以 a^k 记其极限，则 $E_na^k=a_n^k$，$n\geqslant 0$. 由 a_n^k 的定义知，当 $n\leqslant\tau_k$ 时，$a_n^k=0$. 由(4.2.7)式得 $\|\sigma^{(p)}(a^k)\|_\infty\leqslant P(\tau_k<\infty)^{-1/r}$，这说明 a^k 是 $(1,r,\infty;p)$ 原子，并且

$$\begin{aligned}\sum_{k\in Z}\mu_ka_n^k&=\sum_{k\in Z}\Big(f_n^{(\tau_{k+1})}-f_n^{(\tau_k)}\Big)\\&=\sum_{k\in Z}\Big(\sum_{m=0}^n\chi_{\{m\leqslant\tau_{k+1}\}}df_m-\sum_{m=0}^n\chi_{\{m\leqslant\tau_k\}}df_m\Big)\\&=\sum_{m=0}^n\sum_{k\in Z}(\chi_{\{m\leqslant\tau_{k+1}\}}-\chi_{\{m\leqslant\tau_k\}})df_m=f_n,\qquad\forall\ n\geqslant 0\end{aligned}$$

(4.2.6)式得证. 显然在 $\{\tau_k=\infty\}$ 上，$a^{k*}=0$，$\sigma^{(p)}(a^k)=0$. 应用 Hölder 不等式得

$$E(a^{k*})^r = E(a^{k*}\chi_{\{\tau_k<\infty\}})^r$$
$$\leqslant C(E(\sigma^{(p)}(a^k)^p\chi_{\{\tau_k<\infty\}}))^{r/p}P(\tau_k<\infty)^{1-r/p}\leqslant C$$

于是 $\sup_{k\in Z}\|a^{k*}\|_r<\infty$. 下面估计 $\sum_{k\in Z}\mu_k^r$，一方面有：

$$\sum_{k\in Z}\mu_k^r = 3^r\sum_{k\in Z}2^{kr}P(\tau_k<\infty)$$
$$= 3^r\sum_{k\in Z}2^{kr}P\left((T_p^\sigma(f))^r+(\sigma^{(p)}(f))^r>2^{kr}\right)$$
$$= \frac{3^r}{2^r-1}\sum_{k\in Z}\left(2^{(k+1)r}-2^{kr}P\left(\left(T_p^\sigma(f)\right)^r+\left(\sigma^{(p)}(f)\right)^r>2^{kr}\right)\right)$$
$$= \frac{3^r}{2^r-1}\sum_{k\in Z}2^{kr}P\left(2^{(k-1)r}<(T_p^\sigma(f))^r+(\sigma^{(p)}(f))^r\leqslant 2^{kr}\right)$$
$$\leqslant \frac{6^r}{2^r-1}\left(E(T_p^\sigma(f))^r+E(\sigma^{(p)}(f))^r\right)$$

由 $T_p^\sigma(f)$ 的定义，注意到 $(E(\sigma^{(p)}(f)^p\mid\mathscr{F}_0))^{\frac{1}{p}}\leqslant T_p^\sigma(f)$，于是由 Jensen 不等式，当 $r\leqslant p$ 时，有

$$E((\sigma^{(p)}(f))^r\mid\mathscr{F}_0) = E((\sigma^{(p)}(f)^p)^{\frac{r}{p}}\mid\mathscr{F}_0)$$
$$\leqslant (E(\sigma^{(p)}(f)^p\mid\mathscr{F}_0))^{\frac{r}{p}}$$
$$\leqslant (T_p^\sigma(f))^r$$

从而

$$E(\sigma^{(p)}(f)^r) = E(E(\sigma^{(p)}(f)^r\mid\mathscr{F}_0))\leqslant E(T_p^\sigma(f)^r)$$

故

$$\sum_{k\in Z}\mu_k^r\leqslant\frac{6^r}{2^r-1}\times 2E(T_p^\sigma(f)^r)$$
$$=\frac{2\times 6^r}{2^r-1}\|f\|^r_{{}_p\bar{K}_r^\sigma(X)}$$

另一方面，有

$$\sum_{k\in Z}\mu_k^r = 3^r\sum_{k\in Z}2^{kr}P(\tau_k<\infty)$$
$$= 3^r\sum_{k\in Z}2^{kr}P\left((T_p^\sigma(f))^r+(\sigma^{(p)}(f))^r>2^{kr}\right)$$

$$\geqslant 3^r\sum_{k\in Z}2^{kr}P\left((T_p^\sigma(f))^r>2^{kr}\right)$$
$$=\frac{3^r}{2^r-1}\sum_{k\in Z}2^{kr}P\left(2^{(k-1)r}<(T_p^\sigma(f))^r\leqslant 2^{kr}\right)$$
$$\geqslant\frac{3^r}{2^r-1}E(T_p^\sigma(f)^r)$$
$$=\frac{3^r}{2^r-1}\|f\|^r_{{}_p\bar{K}_r^\sigma(X)}$$

关于所有如此的原子分解取下确界即得到(4.2.7)式. 此外由原子 (a_n^k) 的定义知

$$f-\sum_{k=l}^m\mu_k^r a^k = f-f^{(\tau_{m+1})}+f^{(\tau_l)}$$

既然 $\tau_{m+1}\to\infty$, a.e. $(m\to\infty)$，那么 $T_p^\sigma(f-f^{(\tau_{m+1})})\to 0$, a.e. $(m\to\infty)$，因为 $T_p^\sigma(f-f^{(\tau_{m+1})})\leqslant T_p^\sigma(f)$，由控制收敛定理得到 $\|f-f^{(\tau_{m+1})}\|^r_{{}_p\bar{K}_r^\sigma(X)}E(\|T_p^\sigma(f-f^{(\tau_{m+1})})\|^r)\to 0$, a.e. $(m\to\infty)$. 另外，因 $T_p^\sigma(f^{(\tau_l)})\leqslant 2^l$，故 $\lim_{l\to-\infty}\|(f^{(\tau_l)})\|^r_{{}_p\bar{K}_r^\sigma(X)}=0$. 总之，$\lim_{\substack{m\to\infty\\ l\to-\infty}}\|f-\sum_{k=l}^m\mu_k^r a^k\|^r_{{}_p\bar{K}_r^\sigma(X)}=0$.

(ii) ⇒ (i) 设鞅 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$ 满足 $E\sum_{n=1}^\infty\|df_n\|^p = E(\sum_{n=1}^\infty E(\|df_n\|^p\mid\mathscr{F}_{n-1})) = E(\sigma^{(p)}(f)^p)<\infty$，则

$$\left(E(\sigma_m^{(p)}(f)^p-\sigma_n^{(p)}(f)^p\mid\mathscr{F}_n)\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leqslant\left(E(\sigma_m^{(p)}(f)^p\mid\mathscr{F}_n)\right)^{\frac{1}{p}}+(E(\sigma_n^{(p)}(f)^p\mid\mathscr{F}_n))^{\frac{1}{p}}$$

进而，对于任意的 $0<r\leqslant 1$ 有

$$E(T_p^\sigma(f)^r)\leqslant 2E(\sigma^{(p)}(f)^p)<\infty$$

于是 $f\in{}_p\bar{K}_r^\sigma(X)$，它有(ii)中的原子分解. 注意到 $\sup_{k\in Z}\|a^{k*}\|_r<\infty$，$(\mu_k)\in l_r$，则

$$E\| f_m - f_n \|^r \leqslant E\sum_{k\in Z}\mu_k^r \| a_m^k - a_{m-1}^k \|^r$$

$$\leqslant C\sum_{|k|>k_0}\mu_k^r + C\sum_{k\in Z}\mu_k^r\Big(\sup_{|k|\leqslant k_0} E\| a_m^k - a_{m-1}^k \|^r\Big) \tag{4.2.9}$$

既然在 $L_1(X)$ 中，$a_n^k \to a^k$，$k\in Z$，$n\to\infty$. (4.2.9)式说明 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$ 是 $L_r(X)$ 中的 Cauchy 序列. 换言之，f_n 依概率收敛，这说明 X 是 p 一致可光滑空间.

定理 4.2.4 设 X 是 Banach 空间，$1<p\leqslant 2$，$0<r\leqslant p$，则以下条件等价：

(i) X 是 p 一致可光滑空间；

(ii) ${}_p\overline{K}_r^S(X)$ 中的每个鞅 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$ 存在分解：

$$f_n = \sum_{k\in Z}\mu_k E_n a^k, n\geqslant 0$$

使得

$$\| f \|_{{}_pK_r^\sigma(X)} \sim \inf\Big(\sum_{k\in Z}\mu_k^r\Big)^{1/r}$$

这里 a^k 是 $(2,r,\infty;p)$ 原子，$a^k\in L_p(X)$，$(k\in Z)$，并且 $\sup_{k\in Z}\| a^{k*}\|_r<\infty$，$(\mu_k)_{k\in Z}$ 是非负实数列，$(\mu_k)\in l_r$. 其中的“inf”是对 f 的所有如上的原子分解取的，此时 $\sum_{k\in Z}\mu_k a^k$ 在 ${}_p\overline{K}_r^S(X)$ 中收敛于 f.

证明 (i)⇒(ii) 设 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}\in {}_p\overline{K}_r^S(X)$，注意到

$$(E(S_{n+1}^{(p)}(f)^p \mid \mathscr{F}_n))^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant \Big(E(S_{n+1}^{(p)}(f) - S_{n-1}^{(p)}(f))^p \mid \mathscr{F}_n)\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(E(S_{n-1}^{(p)}(f)^p \mid \mathscr{F}_n)\Big)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant T_{p,n}^S(f) + S_{n-1}^{(p)}(f)$$

对于任意 $k\in Z$，定义停时、实数列和原子分别如下：

$$\tau_k = \inf\{n\geqslant 0: T_{p,n}^S(f) + S_{n-1}^{(p)}(f) > 2^k\}$$

$$\mu_k = 3\times 2^k P(\tau_k<\infty)^{1/r},\quad a_n^k = \mu_k^{-1}(f_n^{(\tau_{k+1})} - f_n^{(\tau_k)})$$

其余证明与定理 4.2.3 类似，此处从略. □

§4.3 其他鞅空间的原子分解

本节讨论两类鞅空间 ${}_p\mathscr{L}_r(X)$ 和 ${}_p\mathscr{K}_r(X)$ 的原子分解. 在实值鞅的情形中，这两类鞅空间分别由 Herz(1974 年)和 Garsia(1973 年)在研究鞅 Hardy 空间的共轭问题时所引入的.

设 θ_n 是非负不减适应随机变量序列，$\theta_{-1}\equiv 0$，$\Theta=\{\theta=(\theta_n)_{n\geqslant 0}: E(\theta_\infty)\leqslant 1\}$，定义

$${}_p\mathscr{L}_r(X) = \left\{\begin{array}{l}\text{鞅 } f=(f_n): \\ \| f \|_{{}_p\mathscr{L}_r(X)} = \inf_{\theta\in\Theta}\Big\{(E\sum_{n=1}^\infty \theta_{n-1}^{1-p/r}\| df_n \|^p)^{1/p}\Big\} < \infty\end{array}\right\}$$

对于空间 ${}_p\mathscr{L}_r(X)$ 还可以采用范数(或拟范数)

$$\| f \|_{{}_p\mathscr{L}_r(X)} = \inf_{\theta\in\Theta}\Big\{\Big(E\sum_{n=1}^\infty \theta_{n-1}^{1-p/r}E(\| df_n \|^p \mid \mathscr{F}_{n-1})\Big)^{1/p}\Big\}$$

甚至于

$$\| f \|_{{}_p\mathscr{L}_r(X)} = \inf_{\theta\in\widetilde{\Theta}(f)}\Big\{\Big(E\sum_{n=1}^\infty \theta_{n-1}^{1-p/r}E(\| df_n \|^p \mid \mathscr{F}_{n-1})\Big)^{1/p}\Big\}$$

这里 $\widetilde{\Theta}(f) = \Big\{\theta\in\Theta: E(\sum_{n=1}^\infty \theta_{n-1}^{1-p/r}E(\| df_n \|^p \mid \mathscr{F}_{n-1}))<\infty\Big\}$，容易验证它们之间的等价性.

最后令 $\Gamma_r=\{$非负适应序列 $\gamma=(\gamma_n)_{n\geqslant 0}: \|\gamma^*\|_r\leqslant\infty\}$，$\gamma_{-1}\equiv 0$，定义

$${}_p\mathscr{K}_r(X) = \left\{\begin{array}{l} f=(f_n): \exists\ \gamma\in\Gamma_r,\ \forall\, 0\leqslant n\leqslant m<\infty, \\ \text{使得 } E(\| f_m - f_n \|^p \mid \mathscr{F}_n)\leqslant\gamma_n^p \end{array}\right\}$$

$$\text{并且}\quad \| f \|_{{}_p\mathscr{K}_r(X)} = \inf_\gamma \|\gamma^*\|_r$$

定理 4.3.1 设 X 是 Banach 空间，$1<p\leqslant 2$，$0<r\leqslant 1$，则以下条件等价：

(i) X 是 p 一致可光滑空间；

(ii) ${}_p\mathscr{L}_r(X)$ 中的每个鞅 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$ 存在分解

$$f_n = \sum_{k \in Z} \mu_k E_n a^k, n \geqslant 0 \tag{4.3.1}$$

使得

$$\| f \|_{p\mathscr{L}_r} \sim \inf\left(\sum_{k \in Z} \mu_k^r\right)^{1/r} \tag{4.3.2}$$

这里 a^k 是 $(1,r,\infty;p)$ 原子，$a^k \in L_p(X)$ $(k \in Z)$，并且 $\sup\limits_{k \in Z} \| a^{k*} \|_r < \infty$，$(\mu_k)_{k \in Z}$ 是非负实数列，$(\mu_k) \in l_r$．(4.3.2)式中的"inf"是对 f 的所有如上的原子分解取的，此时 $\sum\limits_{k \in Z} \mu_k a^k$ 在 ${}_p\mathscr{L}_r(X)$ 中收敛于 f．

证明 (i)⇒(ii) 设 $f = (f_n)_{n \geqslant 0} \in {}_p\mathscr{L}_r(X)$，并且不妨设 $\| f \|_{p\mathscr{L}_r} = 1$．对任意 $\theta \in \widetilde{\Theta}(f)$，令 $T_n^{(p)}(f,\theta) = \sum\limits_{i=1}^{n} \theta_{i-1}^{1-p/r} E(\| df_i \|^p \mid \mathscr{F}_{i-1})$，对任意 $k \in Z$，定义停时

$$\beta_k = \inf\{n \geqslant 0: \theta_n^{p/r-1} T_{n+1}^{(p)}(f,\theta) > 2^{kp}\}$$

$$\nu_k = \inf\{n \geqslant 0: T_{n+1}^{(p)}(f,\theta) > 2^{kr}\}$$

$$\tau_k = \beta_k \wedge \nu_k$$

既然 $f \in {}_p\mathscr{L}_r(X)$，$\theta \in \widetilde{\Theta}(f)$，则 $T_\infty^{(p)}(f,\theta) < \infty$，$\theta_\infty < \infty$，a.e. 显然，$\theta_n^{p/r-1} T_{n+1}^{(p)}(f,\theta)$ 和 $T_{n+1}^{(p)}(f,\theta)$ 关于 n 单调不减，于是 $\tau_k = \beta_k \wedge \nu_k \uparrow \infty$．注意

$$\begin{aligned}
\sigma_{n+1}^{(p)}(f)^p &= \theta_n^{p/r-1} \sum_{i=1}^{n+1} \theta_n^{1-p/r} E(\| df_i \|^p \mid \mathscr{F}_{i-1}) \\
&\leqslant \theta_n^{p/r-1} T_{n+1}^{(p)}(f,\theta)
\end{aligned}$$

于是

$$\sigma^{(p)}(f^{(\tau_k)}) \leqslant (\theta_{\tau_k}^{p/r-1} T_\infty^{(p)}(f^{(\tau_k)},\theta))^{1/p} \leqslant 2^k$$

记

$$\mu_k = 3 \times 2^k P(\tau_k < \infty)^{1/r}$$

$$a_n^k = \mu_k^{-1}(f_n^{(\tau_{k+1})} - f_n^{(\tau_k)})$$

从而

$$\begin{aligned}
\sigma^{(p)}(a^k) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} E_{n-1} \| da_n^k \|^p\right)^{1/p} \\
&= \frac{1}{\mu_k}\left(\sum_{n=1}^{\infty} E_{n-1} \| df_n^{(\tau_{k+1})} - df_n^{(\tau_k)} \|^p\right)^{1/p} \\
&\leqslant \frac{1}{\mu_k}(\sigma^{(p)}(f^{(\tau_{k+1})}) + \sigma^{(p)}(f^{(\tau_k)})) \\
&\leqslant \frac{1}{\mu_k}(2^{k+1} + 2^k) \\
&\leqslant P(\tau_k < \infty)^{-1/r}
\end{aligned} \tag{4.3.3}$$

根据 X 的 p 一致光滑性，得到 $\| a^{k*} \|_p \leqslant C \| \sigma^{(p)}(a^k) \|_p \leqslant CP(\tau_k < \infty)^{-1/r}$．则 $(a_n^k)_{n \geqslant 0}$ 是 $L_p(X)$ 有界鞅．因为 p 一致光滑空间具有 Radon-Nikodym 性质，故 a_n^k 几乎处处收敛，仍以 a^k 记其极限，则 $E_n a^k = a_n^k$，$n \geqslant 0$．由 a_n^k 的定义知，当 $n \leqslant \tau_k$ 时，$a_n^k = 0$．由(4.3.3)式得 $\| \sigma^{(p)}(a^k) \|_\infty \leqslant P(\tau_k < \infty)^{-1/r}$，这说明 a^k 是 $(1,r,\infty;p)$ 原子，并且

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in Z} \mu_k a_n^k &= \sum_{k \in Z} (f_n^{(\tau_{k+1})} - f_n^{(\tau_k)}) \\
&= \sum_{k \in Z} \left(\sum_{m=0}^{n} I_{\{m \leqslant \tau_{k+1}\}} df_m - \sum_{m=0}^{n} I_{\{m \leqslant \tau_k\}} df_m\right) \\
&= \sum_{m=0}^{n} \sum_{k \in Z} \left(I_{\{m \leqslant \tau_{k+1}\}} - I_{\{m \leqslant \tau_k\}}\right) df_m \\
&= f_n, \ \forall \ n \geqslant 0
\end{aligned}$$

(4.3.1)式得证．显然在 $\{\tau_k = \infty\}$ 上，$a^{k*} = 0$，$\sigma^{(p)}(a^k) = 0$．应用 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned}
E(a^{k*})^r &= E(a^{k*} I_{\{\tau_k < \infty\}})^r \\
&\leqslant C(E\sigma^{(p)}(a^k)^p I_{\{\tau_k < \infty\}})^{r/p} P(\tau_k < \infty)^{1-r/p} \\
&\leqslant C
\end{aligned}$$

于是 $\sup\limits_{k \in Z} \| a^{k*} \|_r < \infty$．下面估计 $\sum\limits_{k \in Z} \mu_k^r$，一方面有

$$\sum_{k\in Z}\mu_k^r = 3^r\sum_{k\in Z}2^{kr}P(\tau_k<\infty)$$
$$=3^r\sum_{k\in Z}2^{kr}P(\{\beta_k<\infty\}\cup\{\nu_k<\infty\})$$
$$\geqslant 3^r\sum_{k\in Z}2^{kr}P(\nu_k<\infty)$$
$$=3^r\sum_{k\in Z}2^{kr}P(T_\infty^{(p)}(f,\theta)>2^{kr})$$
$$\geqslant\frac{3^r}{2^r-1}E(T_\infty^{(p)}(f,\theta))$$
$$=C_1E(T_\infty^{(p)}(f,\theta))$$

从而

$$C_1\|f\|_{{}_p\mathscr{L}_r}\leqslant\inf\Big(\sum_{k\in Z}\mu_k^r\Big)_{1/r} \tag{4.3.4}$$

另一方面，有

$$\sum_{k\in Z}\mu_k^r=3^r\sum_{k\in Z}2^{kr}P(\{\beta_k<\infty\}\cup\{\nu_k<\infty\})$$
$$=3^r\Big(\sum_{k\in Z}2^{kr}P(\nu_k<\infty)+\sum_{k\in Z}2^{kr}P(\{\beta_k<\infty\}\cap\{\nu_k=\infty\})\Big)$$
$$\triangleq 3^r(I_1+I_2)$$

对于 I_1 和 I_2，由 Abel 重排，分别有

$$I_1=\sum_{k\in Z}2^{kr}P(\nu_k<\infty)=\sum_{k\in Z}2^{kr}P(T_\infty^{(p)}(f,\theta)>2^{kr})$$
$$\leqslant\frac{1}{2^r-1}E(T_\infty^{(p)}(f,\theta))$$

以及

$$I_2=\sum_{k\in Z}2^{kr}P(\{\beta_k<\infty\}\cap\{\nu_k=\infty\})$$
$$=\sum_{k\in Z}2^{kr}P(\{\theta_\infty^{p/r-1}T_\infty^{(p)}(f,\theta>2^{kp}\}\cap\{T_\infty^{(p)}(f,\theta)\leqslant 2^{kr}\})$$
$$\leqslant\sum_{k\in Z}2^{kr}P(\theta_\infty>2^{kr})$$
$$\leqslant\frac{2^r}{2^r-1}E(\theta_\infty)\leqslant\frac{2^r}{2^r-1}$$

于是

$$\inf\Big(\sum_{k\in Z}\mu_k^r\Big)^{1/r}\leqslant C_2\|f\|_{{}_p\mathscr{L}_r}+C_2$$

由范数的齐性得

$$\inf\Big(\sum_{k\in Z}\mu_k^r\Big)^{1/r}\leqslant C_3\|f\|_{{}_p\mathscr{L}_r} \tag{4.3.5}$$

由(4.3.4)式、(4.3.5)式，则(4.3.2)式得证.

由 (a_n^k) 的定义知，$f-\sum_{k=l}^m\mu_k a^k=f-f^{(\tau_{m+1})}+f^{(\tau_l)}$，既然 $\tau_{m+1}\to\infty$，a.e. $(m\to\infty)$，于是

$$T_\infty^{(p)}(f-f^{(\tau_{m+1})},\theta)$$
$$=T_\infty^{(p)}(f,\theta)-T_\infty^{(p)}(f^{(\tau_{m+1})},\theta)\to 0,\ a.e.\ (m\to\infty)$$

因为 $T_\infty^{(p)}(f-f^{(\tau_{m+1})},\theta)\leqslant T_\infty^{(p)}(f,\theta)$，由控制收敛定理得

$$\|f-f^{(\tau_{m+1})}\|_{{}_p\mathscr{L}_r}^p$$
$$=\inf_{\theta\in\bar\Theta(f)}\{E(T_\infty^{(p)}(f-f^{(\tau_{m+1})}))\}\to 0,\qquad(m\to\infty)$$

另一方面，因 $T_\infty^{(p)}(f^{(\tau_l)})\leqslant 2^{lp}$，故 $\lim\limits_{l\to-\infty}\|f^{(\tau_l)}\|_{{}_p\mathscr{L}_r}=0$. 总之 $\lim\limits_{\substack{m\to\infty\\ l\to-\infty}}\|f-\sum_{k=l}^m\mu_k a^k\|_{{}_p\mathscr{L}_r}=0$.

(ii)⇒(i)　设鞅 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$ 满足 $E\sum_{n=1}^\infty\|df_n\|^p=E(\sum_{n=1}^\infty E(\|df_n\|^p\mid\mathscr{F}_{n-1}))<\infty$，则对于任意的 $0<r\leqslant 1$ 有

$$\|f\|_{{}_p\mathscr{L}_r}^p=\inf_{\theta\in\Theta}\Big\{\Big(E\sum_{n=1}^\infty\theta_{n-1}^{1-p/r}E(\|df_n\|^p\mid\mathscr{F}_{n-1})\Big)^{1/p}\Big\}$$
$$\leqslant E\Big(\sum_{n=1}^\infty E(\|df_n\|^p\mid\mathscr{F}_{n-1})\Big)<\infty$$

于是 $f\in{}_p\mathscr{L}_r(X)$，它有(ii)中的原子分解. 注意到 $\sup\limits_{k\in Z}\|a^{k*}\|_r<\infty$，$(\mu_k)\in l_r$，则

$$E\|f_m-f_n\|^r\leqslant E\sum_{k\in Z}\mu_k^r\|a_m^k-a_{m-1}^k\|^r$$

$$\leqslant C\sum_{|k|>k_0}\mu_k^r + C\sum_{k\in Z}\mu_k^r\left(\sup_{|k|\leqslant k_0} E\| a_m^k - a_{m-1}^k \|^r\right) \tag{4.3.6}$$

既然在 $L_1(X)$ 中，$a_n^k \to a^k$，$k \in Z$，$n \to \infty$．(4.3.6)式说明 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$ 是 $L_r(X)$ 中的 Cauchy 序列．换言之，f_n 依概率收敛，这说明 X 是 p 一致可光滑空间． □

注*：实际上(i)⇒(ii)对 $0<r\leqslant p$ 也成立，因为(4.3.4)式在此情形下依然成立．

定理 4.3.2 设 X 是 Banach 空间，$2\leqslant q<\infty$，$0<r\leqslant q$，则以下条件等价：

(i) X 是 q 一致可凸空间；

(ii) ${}_q\mathscr{K}_r(X)$ 中的每个鞅 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$ 存在分解

$$f_n = \sum_{k\in Z}\mu_k E_n a^k, n\geqslant 0$$

使得

$$\| f \|_{{}_q\mathscr{K}_r(X)} \sim \inf\left(\sum_{k\in Z}\mu_k^r\right)^{1/r}$$

这里 a^k 是 $(3,r,q)$ 原子，$k\in Z$，并且 $\sup\limits_{k\in Z}\|\sigma^{(q)}(a^k)\|_r<\infty$，$(\mu_k)_{k\in Z}$ 是非负实数列，$(\mu_k)\in l_r$．

证明 (i)⇒(ii) 设 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}\in {}_q\mathscr{K}_r(X)$，则存在 $\gamma=(\gamma_n)_{n\geqslant 0}\in\Gamma_r$，使得

$$[E(\| f_m - f_n\|^q \mid \mathscr{F}_n)]^{1/q}\leqslant \gamma_n, \qquad \forall\, 0\leqslant n\leqslant m<\infty$$

于是

$$[E(\| f_n\|^q \mid \mathscr{F}_{n-1})]^{1/q}\leqslant \gamma_{n-1} + \| f_{n-1}\|, \qquad \forall\ n\geqslant 1$$

取 $p=q/(q-1)$，对任意 $k\in Z$，定义停时

$$\tau_k = \inf\left\{n\geqslant 0:\gamma_n + \| f_n\| > 2^k\right\}$$
$$\mu_k = 3p\times 2^k P(\tau_k<\infty)^{1/r}$$
$$a_n^k = \mu_k^{-1}(f_n^{(\tau_{k+1})} - f_n^{(\tau_k)})$$

其余部分类似于定理 4.2.1 的证明，此处从略． □

§4.4 小指标鞅空间的嵌入关系

在第三章中曾经讨论过几种鞅空间的相互嵌入关系，不难看出，这些嵌入关系可以刻画 Banach 空间的一致凸性和一致光滑性．不过，其讨论的均是大指标鞅空间，即其中的指标 $r>1$，对于小指标 $(0<r\leqslant 1)$ 鞅空间来说，其方法不再适用，本节将借助于前面所建立的原子分解工具来讨论它们之间的相互嵌入关系．

一、鞅 Hardy 空间的嵌入关系

定理 4.4.1 设 X 是 Banach 空间，$1<p\leqslant 2$，$0<r\leqslant 1$，则以下条件等价：

(i) X 是 p 一致可光滑空间；

(ii) ${}_pH_r^\sigma(X)\subset H_r(X)$，并且存在 $C>0$，使得对于每个 X 值鞅 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$ 成立

$$\| f\|_{H_r(X)}\leqslant C\| f\|_{{}_pH_r^\sigma(X)} \tag{4.4.1}$$

(iii) ${}_pQ_r(X)\subset H_r(X)$，并且存在 $C>0$，使得对于每个 X 值鞅 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$ 成立

$$\| f\|_{H_r(X)}\leqslant C\| f\|_{{}_pQ_r(X)} \tag{4.4.2}$$

证明 (i)⇒(ii) 由定理 4.1.1 知，当 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}\in {}_pH_r^\sigma(X)$ 时，f 有关于 $(1,r,\infty;p)$ 的原子分解

$$f_n=\sum_{k\in Z}\mu_k E_n a^k, \qquad n\geqslant 0$$

并且(4.1.2)式成立．由于 $\sup\limits_k\| a^{k*}\|_r<\infty$，故

$$E(f^*)^r\leqslant \sum_{k\in Z}\mu_k^r E(a^{k*})^r$$
$$\leqslant C\sum_{k\in Z}\mu_k^r\leqslant C\| f\|_{{}_pH_r^\sigma(X)}$$

此即(4.4.1)式．类似地，利用定理 4.1.2 可证明(4.4.2)式．故(i)⇒(iii)成立．

(ii)⇒(i)　设 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$ 满足 $E(\sigma^{(p)}(f)^p)=\sum_{n=0}^{\infty}\|df_n\|^p<\infty$. 由 Hölder 不等式得到

$$E(\sigma^{(p)}(f)^r)\leqslant(E(\sigma^{(p)}(f)^p))^{\frac{r}{p}}<\infty$$

故 $f\in {}_pH_r^\sigma(X)$. 对于鞅 $(f_{n+m}-f_n)_{m\geqslant 0}$ 应用(4.4.1)式得到

$$\|f_{n+m}-f_n\|_r\leqslant C\|\sigma^{(p)}(f)-\sigma_{n-1}^{(p)}(f)\|_r$$

由控制收敛定理知，f_n 是 L_r 中的 Cauchy 序列，从而依概率收敛，于是 X 是 p 一致可光滑空间.

(iii)⇒(i)　设 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$ 是 X 值的 Walsh－Paley 鞅，满足 $E(\sigma^{(p)}(f)^p)=\sum_{n=0}^{\infty}\|df_n\|^p<\infty$，则有 $S_n^{(p)}(f)=\sigma_n^{(p)}(f)$，$\forall n$，$\|f\|_{{}_pQ_r(X)}\leqslant\|f\|_{{}_pH_r^\sigma(X)}$. 对于 $\widetilde{f}=(f_{n+m}-f_n)_{m\geqslant 0}$ 由(4.4.2)式得

$$\begin{aligned}\|f_{n+m}-f_n\|_r&\leqslant C\|\widetilde{f}\|_{{}_pQ_r(X)}\\&\leqslant C\|\sigma^{(p)}(f)-\sigma_{n-1}^{(p)}(f)\|_r\end{aligned}$$

由此与(ii)⇒(i) 一样，可知 f_n 依概率收敛，从而 X 是 p 一致可光滑空间. □

定理 4.4.2　设 X 是 Banach 空间，$2\leqslant q<\infty$，$0<r\leqslant 1$，则以下条件等价：

(i) X 是 q 一致可凸空间；

(ii) $D_r(X)\subset {}_qH_r^S(X)$，并且存在 $C>0$，使得对于每个 X 值鞅 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$ 成立

$$\|f\|_{{}_qH_r^S(X)}\leqslant C\|f\|_{D_r(X)}\tag{4.4.3}$$

(iii) $D_r(X)\subset {}_qH_r^\sigma(X)$，并且存在 $C>0$，使得对于每个 X 值鞅 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$ 成立

$$\|f\|_{{}_qH_r^\sigma(X)}\leqslant C\|f\|_{D_r(X)}\tag{4.4.4}$$

证明 (i)⇒(ii)，(iii)　设 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}\in D_r(X)$，空间 X 具有 RN 性质. 由定理 4.1.3 知，f 有 $(3,r,\infty)$ 原子分解 $f_n=$

$\sum_{k\in Z}\mu_k E_n a^k$，$n\geqslant 0$，并且(4.1.16)式成立. 由此分解知 $(df_n)\chi_{(\tau_k<n\leqslant\tau_{k+1})}=\mu_k da_n^k$. 于是

$$\begin{aligned}S^{(q)}(f)^q&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k\in Z}\|df_n\|^q\chi_{(\tau_k<n\leqslant\tau_{k+1})}\\&=\sum_{k\in Z}\sum_{n=0}^{\infty}\|df_n\|^q\chi_{(\tau_k<n\leqslant\tau_{k+1})}\\&=\sum_{k\in Z}\sum_{n=0}^{\infty}\mu_k^q\|da_n^k\|^q\\&=\sum_{k\in Z}\mu_k^qS^{(q)}(a^k)^q\end{aligned}$$

注意到 $\|a^{k*}\|_\infty\leqslant P(\tau_k<\infty)^{-\frac{1}{r}}$，并且当 $\tau_k=\infty$ 时，$a^{k*}=0$，由 X 的 q 一致可凸性，利用 Pisier 不等式得到

$$\begin{aligned}ES^{(q)}(a^k)^r&=ES^{(q)}(a^k)^r\chi_{(\tau_k<\infty)}\\&\leqslant(ES^{(q)}(a^k)^q)^{\frac{r}{q}}P(\tau_k<\infty)^{1-\frac{r}{q}}\\&\leqslant C(E(a^k)^q)^{\frac{r}{q}}P(\tau_k<\infty)^{1-\frac{r}{q}}\\&\leqslant C(E(a^k)^q\chi_{(\tau_k<\infty)})^{\frac{r}{q}}P(\tau_k<\infty)^{1-\frac{r}{q}}\leqslant C\end{aligned}$$

利用以上两式和(4.1.16)式得

$$\begin{aligned}ES^{(q)}(a^k)^r&\leqslant\sum_{k\in Z}\mu_k^rS^{(q)}(a^k)^r\\&\leqslant C\sum_{k\in Z}\mu_k^r\leqslant C\|f\|_{D_r(X)}^r\end{aligned}$$

此即(4.4.3)式. 类似于上述两式可得到 $\sigma^{(q)}(f)^q=\sum_{k\in Z}\mu_k^q\sigma^{(q)}(a^k)^q$，以及 $E\sigma^{(q)}(a^k)^r\leqslant C$. 从而

$$E\sigma^{(q)}(f)^r\leqslant C\sum_{k\in Z}\mu_k^r\leqslant C\|f\|_{D_r(X)}^r$$

此即(4.4.4)式.

(ii)或(iii)⇒(i)　设 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$ 是 X 值的 Walsh－Paley 鞅，满足 $\sup_n\|f_n\|_\infty<\infty$，则由(4.4.3)式或(4.4.4)式可得 $S^{(q)}(f)$

$< \infty$, a.e.，或 $\sigma^{(q)}(f) < \infty$, a.e.. 在后一种情况下，由于 $d^*(f) = \sup_n \| df_n \| \in L_\infty$，Garsia 引理说明 $S^{(q)}(f) < \infty$, a.e.，由此得知 X 是 q 一致可凸空间. □

二、平削算子生成的鞅空间的嵌入关系

定理 4.4.3 设 X 是 Banach 空间，$1 < p \leqslant 2, 0 < r \leqslant 1$，则以下条件等价：

(i) X 是 p 一致可光滑空间；

(ii) ${}_p\overline{K}_r^\sigma(X) \subset {}_p\overline{K}_r^+(X)$，并且存在 $C > 0$，使得对于每个 X 值鞅 $f = (f_n)_{n\geqslant 0}$ 成立

$$\| f \|_{{}_p\overline{K}_r^+(X)} \leqslant C \| f \|_{{}_p\overline{K}_r^\sigma(X)} \tag{4.4.5}$$

(iii) ${}_p\overline{K}_r^S(X) \subset {}_p\overline{K}_r(X)$，并且存在 $C > 0$，使得对于每个 X 值鞅 $f = (f_n)_{n\geqslant 0}$ 成立

$$\| f \|_{{}_p\overline{K}_r(X)} \leqslant C \| f \|_{{}_p\overline{K}_r^S(X)} \tag{4.4.6}$$

证明 (i)⇒(ii) 假设 X 是 p 一致可光滑空间. 由定理 4.2.3 知，当 $f = (f_n)_{n\geqslant 0} \in {}_p\overline{K}_r^\sigma(X)$ 时，f 有关于 $(1, r, \infty; p)$ 的原子分解 $f_n = \sum_{k\in Z} \mu_k E_n a^k, n \geqslant 0$. 并且(4.2.7)式成立. 由 X 的 p 一致可光滑性，应用 Minkowski 不等式得

$$\begin{aligned}
&\left(E(\| f_m - f_n \|^p \mid \mathscr{F}_n)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(E(\| \sum_{k\in Z} \mu_k (a_m^k - a_n^k) \|^p \mid \mathscr{F}_n)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant C \sum_{k\in Z} \mu_k \left(E(\sum_{i=n+1}^{m} E(\| da_i^k \| \mid \mathscr{F}_{i-1}) \mid \mathscr{F}_n)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant C \sum_{k\in Z} \mu_k \left(E(\sigma^{(p)}(a^k)^p \mid \mathscr{F}_n)\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

由于 a^k 是 $(1, r, \infty; p)$ 的原子，容易验证

$$\begin{aligned}
&E\left(\sum_{k\in Z} \mu_k \left(E(\sigma^{(p)}(a^k)^p \mid \mathscr{F}_n)\right)^{\frac{1}{p}}\right)^r \\
&\leqslant \sum_{k\in Z} \mu_k^r \left(E(E(\sigma^{(p)}(a^k)^p \mid \mathscr{F}_n))^{\frac{1}{p}} \chi_{(\tau_k < \infty)}\right)^r \\
&\leqslant \sum_{k\in Z} \mu_k^r
\end{aligned}$$

于是 $\| T_p^+(f) \|_r^r \leqslant C \| f \|_{{}_p\overline{K}_r^\sigma(X)}$，故 $\| f \|_{{}_p\overline{K}_r^+(X)} \leqslant C \| f \|_{{}_p\overline{K}_r^\sigma(X)}$，这说明 ${}_p\overline{K}_r^\sigma(X) \subset {}_p\overline{K}_r^+(X)$.

(ii)⇒(i) 设鞅 $f = (f_n)_{n\geqslant 0}$ 满足 $E(\sigma^{(p)}(f)^p) = \sum_{n=0}^{\infty} \| df_n \|^p < \infty$. 由 Hölder 不等式得到

$$E(\sigma^{(p)}(f)^r) \leqslant (E(\sigma^{(p)}(f)^p))^{\frac{r}{p}} < \infty$$

故 $f \in {}_p\overline{K}_r^\sigma(X)$. 对于鞅 $(f_{n+m} - f_n)_{m\geqslant 0}$，应用(4.4.5)式得到

$$\begin{aligned}
\| f_{n+m} - f_n \|_r^r &= E(\| f_{n+m} - f_n \|^r) \\
&\leqslant (E(E(\| f_{n+m} - f_n \|^p \mid \mathscr{F}_n)))^{\frac{r}{p}} \\
&\leqslant \| f_{n+m} \|_{{}_p\overline{K}_r^+(X)}^r \\
&\leqslant C \| f_{n+m} \|_{{}_p\overline{K}_r^\sigma(X)}^r \\
&\leqslant C \| \sigma^{(p)}(f) - \sigma_{n-1}^{(p)}(f) \|_r^r
\end{aligned}$$

根据控制收敛定理，由上式得知 f_n 是 L_r 中的 Cauchy 序列，从而依概率收敛，于是 X 是 p 一致可光滑空间.

(iii)⇔(i) 利用定理 4.2.4，类似于(i)⇒(ii)的证明可证(i)⇒(iii)；利用不等式(4.4.6)，类似于(ii)⇒(i)可以证明(iii)⇒(i). □

定理 4.4.4 设 X 是 Banach 空间，$2 \leqslant q < \infty, 0 < r \leqslant 1$，则以下条件等价：

(i) X 是 q 一致可凸空间；

(ii) ${}_q\overline{K}_r^+(X) \subset {}_q\overline{K}_r^\sigma(X)$，并且存在 $C > 0$，使得对于每个 X 值鞅 $f = (f_n)_{n\geqslant 0}$ 成立

$$\| f \|_{{}_q\overline{K}_r^\sigma(X)} \leqslant C \| f \|_{{}_q\overline{K}_r^+(X)}$$

(iii) ${}_q\overline{K}_r(X) \subset {}_q\overline{K}_r^S(X)$，并且存在 $C > 0$，使得对于每个 X 值鞅 $f = (f_n)_{n\geqslant 0}$ 成立

$$\| f \|_{{}_q\overline{K}_r^S(X)} \leqslant C \| f \|_{{}_q\overline{K}_r(X)}$$

证明　根据定理 4.2.1 和定理 4.2.2，类似于定理 4.4.2 可证，证明从略.　□

三、其他鞅空间的嵌入关系

现在讨论鞅空间 ${}_p\overline{K}_r^+(X)$，${}_pH_r^\sigma(X)$，${}_p\mathscr{L}_r(X)$，${}_p\mathscr{K}_r(X)$，$H_r^*(X)$ 以及 $D_r(X)$ 之间的嵌入关系及其与值空间的凸性和光滑性的联系.

定理 **4.4.5**　设 X 是 Banach 空间，$1 < p \leqslant 2, 0 < r \leqslant 1$，则以下条件等价：

(i) X 是 p 一致可光滑空间；

(ii) ${}_pH_r^\sigma(X) \subset {}_p\overline{K}_r^+(X)$ 并且存在 $C > 0$，使得对每个 ${}_pH_r^\sigma(X)$ 中的鞅 $f = (f_n)_{n \geqslant 0}$ 成立

$$\| f \|_{{}_p\overline{K}_r^+(X)} \leqslant C \| f \|_{{}_pH_r^\sigma(X)} \tag{4.4.7}$$

(iii) ${}_p\mathscr{L}_r(X) \subset {}_p\overline{K}_r^+(X)$ 并且存在 $C > 0$，使得对每个 ${}_p\mathscr{L}_r(X)$ 中的鞅 $f = (f_n)_{n \geqslant 0}$ 成立

$$\| f \|_{{}_p\overline{K}_r^+(X)} \leqslant C \| f \|_{{}_p\mathscr{L}_r(X)} \tag{4.4.8}$$

证明　(i)⇒(ii) 假设 X 是 p 一致可光滑空间. 由定理 4.1.1 知：当 $f = (f_n)_{n \geqslant 0} \in {}_pH_r^\sigma(X)$ 时，f 有关于 $(1, r, \infty; p)$ 的原子分解 $f_n = \sum_{k \in Z} \mu_k a_n^k, n \geqslant 0$，并且(4.1.2)式成立. 由 X 的 p 一致光滑性，应用 Minkowski 不等式得

$$\begin{aligned}
&\left(E(\| f_m - f_n \|^p \mid \mathscr{F}_n)\right)^{1/p} \\
&= \left(E\left(\| \sum_{k \in Z} \mu_k (a_m^k - a_n^k) \|^p \mid \mathscr{F}_n\right)\right)^{1/p} \\
&\leqslant C \sum_{k \in Z} \mu_k \left(E\left(\sum_{i=n+1}^{m} E(\| da_i^k \|^p \mid \mathscr{F}_{i-1}) \mid \mathscr{F}_n\right)\right)^{1/p} \\
&\leqslant C \sum_{k \in Z} \mu_k \left(E(\sigma^{(p)}(a^k)^p \mid \mathscr{F}_n)\right)^{1/p}
\end{aligned}$$

由于 a^k 是 $(1, r, \infty; p)$ 原子，容易验证

$$\begin{aligned}
&E\left(\sum_{k \in Z} \mu_k (E(\sigma^{(p)}(a^k)^p \mid \mathscr{F}_n))^{1/p}\right)^r \\
&\leqslant \sum_{k \in Z} \mu_k^r E\left(\left(E(\sigma^{(p)}(a^k)^p \mid \mathscr{F}_n)\right)^{1/p} \chi_{\{\tau_k < \infty\}}\right)^r \\
&\leqslant \sum_{k \in Z} \mu_k^r
\end{aligned}$$

于是 $\| T_p^+(f) \|_r^r \leqslant C \| f \|_{{}_pH_r^\sigma(X)}^r$，故 $\| f \|_{{}_p\overline{K}_r^+(X)} \leqslant C \| f \|_{{}_pH_r^\sigma(X)}$，这说明 ${}_pH_r^\sigma(X) \subset {}_p\overline{K}_r^+(X)$.

(ii)⇒(i) 设鞅 $f = (f_n)_{n \geqslant 0}$ 满足 $E(\sigma^{(p)}(f)^p) = E\sum_{n=1}^{\infty} \| df_n \|^p < \infty$. 由 Hölder 不等式得 $E(\sigma^{(p)}(f)^r) \leqslant (E(\sigma^{(p)}(f)^p))^{r/p} < \infty$，从而 $f \in {}_pH_r^\sigma(X)$. 对于鞅 $(f_{m+n} - f_n)_{m \geqslant 0}$ 应用不等式(4.4.7)得

$$\begin{aligned}
\| f_{m+n} - f_n \|_r^r &= E(\| f_{m+n} - f_n \|^r) \\
&\leqslant E(E(\| f_{m+n} - f_n \|^p \mid \mathscr{F}_n)^{r/p} \\
&\leqslant \| f_{m+n} \|_{{}_p\overline{K}_r^+(X)}^r \\
&\leqslant C \| f_{m+n} \|_{{}_pH_r^\sigma(X)}^r \\
&\leqslant C \| \sigma^{(p)}(f) - \sigma^{(p)}(f_{n-1}) \|_r^r
\end{aligned}$$

据控制收敛定理，由上式得知 f_n 是 $L_r(X)$ 中的 Cauchy 序列，从而 f_n 依概率收敛，这说明 X 是 p 一致可光滑空间.

(iii)⇔(i)　利用定理 4.3.1，证明类似于(i)⇒(ii)可得(i)⇒(iii). 利用不等式(4.4.8)，类似于(ii)⇒(i)可得(iii)⇒(i).　□

定理 **4.4.6**　设 X 是 Banach 空间，$2 \leqslant q < \infty, 0 < r \leqslant 1$，则以下条件等价：

(i) X 是 q 一致可凸空间；

(ii) ${}_q\overline{K}_r^+(X) \subset {}_qH_r^\sigma(X)$ 并且存在 $C > 0$，使得对每个 ${}_q\overline{K}_r^+(X)$ 中的鞅 $f = (f_n)_{n \geqslant 0}$ 成立

$$\| f \|_{{}_qH_r^\sigma(X)} \leqslant C \| f \|_{{}_q\overline{K}_r^+(X)} \tag{4.4.9}$$

(iii) ${}_q\overline{K}_r^+(X) \subset {}_q\mathscr{L}_r(X)$ 并且存在 $C > 0$，使得对每个

${}_q\overline{K}_r^+(X)$ 中的鞅 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$ 成立

$$\|f\|_{{}_q\mathscr{L}_r(X)}\leqslant C\|f\|_{{}_qK_r^+(X)}\tag{4.4.10}$$

证明 (i)⇒(ii) 假设 X 同构于 q 一致凸空间. 由定理 4.2.1，当 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}\in{}_q\overline{K}_r^+(X)$ 时，f 有关于 $(3,r,q)$ 的原子分解 $f_n=\sum\limits_{k\in Z}\mu_k a_n^k, n\geqslant 0$，并且(4.2.2)式成立. 于是 $\sigma^{(q)}(f)^q=\sum\limits_{k\in Z}\mu_k^q\sigma^{(q)}(a^k)^q$，从而 $\sigma^{(q)}(f)^r=\left(\sum\limits_{k\in Z}\mu_k^q\sigma^{(q)}(a^k)^q\right)^{r/q}\leqslant\sum\limits_{k\in Z}\mu_k^r\sigma^{(q)}(a^k)^r$. 注意，$\sup\limits_{k\in Z}\|\sigma^{(q)}(a^k)\|_r<\infty$，$\|f\|_{{}_qK_r^+(X)}\sim\inf\left(\sum\limits_{k\in Z}\mu_k^r\right)^{1/r}$，于是

$$E(\sigma^{(q)}(f)^r)\leqslant\sum_{k\in Z}\mu_k^r E\left(\sigma^{(q)}(a^k)^r\right)\leqslant C\|f\|^r_{{}_qK_r^+(X)}$$

此即(4.4.9)式，故 ${}_q\overline{K}_r^+(X)\subset{}_qH_r^\sigma(X)$. (i)⇒(iii)的证明类似于(i)⇒(ii).

(ii)⇒(i) 设 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$ 为 X 值 Walsh-Paley 鞅，满足 $\sup\|f_n\|_\infty<\infty$. 则显然 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}\in{}_q\overline{K}_r^+(X)$，由不等式(4.4.9)可得 $\sigma^{(q)}(f)<\infty$, $a.e.$，进一步由 Garsia 引理说明 $S^{(q)}(f)<\infty$, $a.e.$ 故 X 是 q 一致可凸空间. (iii)⇒(i)的证明类似于(ii)⇒(i). □

引理 4.4.7 设 X 是 Banach 空间，$1<p<\infty$，$0<r\leqslant p$，则 ${}_p\mathscr{K}_r(X)\sim{}_p\overline{K}_r^+(X)$.

证明 ${}_p\overline{K}_r^+(X)\subset{}_p\mathscr{K}_r(X)$ 显然. 反之，设 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}\in{}_p\mathscr{K}_r(X)$，则存在 $\gamma=(\gamma_n)_{n\geqslant 0}\in\Gamma_r$，使得

$$E(\|f_m-f_n\|^p\mid\mathscr{F}_n)\leqslant\gamma_n^p,\qquad\forall\, 0\leqslant n\leqslant m<\infty$$

于是

$$T_{p,n}^+(f)=\sup_{m\geqslant n}(E(\|f_m-f_n\|^p\mid\mathscr{F}_n))^{1/p}\leqslant\gamma_n,\qquad\forall\, n\geqslant 0$$

进而 $T_p^+(f)\leqslant\gamma^*$，且 $\|T_p^+(f)\|_r\leqslant\inf\limits_\gamma\|\gamma^*\|_r=\|f\|_{{}_p\mathscr{K}_r(X)}$. 从而 ${}_p\mathscr{K}_r(X)\subset{}_p\overline{K}_r^+(X)$，故 ${}_p\mathscr{K}_r(X)\sim{}_p\overline{K}_r^+(X)$. □

推论 4.4.1 设 X 是 Banach 空间，$1<p\leqslant 2, 0<r\leqslant 1$，则

以下条件等价：

(i) X 是 p 一致可光滑空间；

(ii) ${}_pH_r^\sigma(X)\subset{}_p\mathscr{K}_r(X)$ 并且存在 $C>0$，使得对每个 ${}_pH_r^\sigma(X)$ 中的鞅 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$ 成立

$$\|f\|_{{}_p\mathscr{K}_r(X)}\leqslant C\|f\|_{{}_pH_r^\sigma(X)}$$

(iii) ${}_p\mathscr{L}_r(X)\subset{}_p\mathscr{K}_r(X)$ 并且存在 $C>0$，使得对每个 ${}_p\mathscr{L}_r(X)$ 中的鞅 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$ 成立

$$\|f\|_{{}_p\mathscr{K}_r(X)}\leqslant C\|f\|_{{}_p\mathscr{L}_r(X)}$$

推论 4.4.2 设 X 是 Banach 空间，$2\leqslant q<\infty, 0<r\leqslant 1$，则以下条件等价：

(i) X 是 q 一致可凸空间；

(ii) ${}_q\mathscr{K}_r(X)\subset{}_qH_r^\sigma(X)$ 并且存在 $C>0$，使得对每个 ${}_q\mathscr{K}_r(X)$ 中的鞅 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$ 成立

$$\|f\|_{{}_qH_r^\sigma(X)}\leqslant C\|f\|_{{}_q\mathscr{K}_r(X)}$$

(iii) ${}_q\mathscr{K}_r(X)\subset{}_q\mathscr{L}_r(X)$ 并且存在 $C>0$，使得对每个 ${}_q\mathscr{K}_r(X)$ 中的鞅 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$ 成立

$$\|f\|_{{}_q\mathscr{L}_r(X)}\leqslant C\|f\|_{{}_q\mathscr{K}_r(X)}$$

由 Kwapien 定理，可得如下结论：

推论 4.4.3 设 X 是 Banach 空间，$0<r\leqslant 1$，则以下条件等价：

(i) X 同构于 Hilbert 空间；

(ii) ${}_2\overline{K}_r^+(X)\sim{}_2H_r^\sigma(X)$；

(iii) ${}_2\overline{K}_r^+(X)\sim{}_2\mathscr{L}_r(X)$；

(iv) ${}_2\mathscr{K}_r(X)\sim{}_2H_r^\sigma(X)$；

(v) ${}_2\mathscr{K}_r(X)\sim{}_2\mathscr{L}_r(X)$.

定理 4.4.8 设 X 是 Banach 空间，$1<p\leqslant 2$，$0<r\leqslant 1$，则以下条件等价：

(i) X 是 p 一致可光滑空间；

(ii) ${}_p\mathscr{L}_r(X)\subset H_r(X)$ 并且存在 $C>0$，使得对每个 ${}_p\mathscr{L}_r(X)$

中的鞅 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$ 成立

$$\|f\|_{H_r(X)}\leqslant C\|f\|_{{}_p\mathscr{L}_r(X)} \tag{4.4.11}$$

证明 (i)⇒(ii) 假设 X 是 p 一致可光滑空间. 由定理 4.3.1，当 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}\in {}_p\mathscr{L}_r(X)$ 时，f 有关于 $(1,r,\infty;p)$ 的原子分解 $f_n=\sum\limits_{k\in Z}\mu_k a_n^k, n\geqslant 0$，并且(4.3.2)式成立. 由于 $\sup\limits_k\|a^{k*}\|_r<\infty$，故

$$E(f^*)^r\leqslant\sum_{k\in Z}\mu_k^r E(a^{k*})^r$$
$$\leqslant C\sum_{k\in Z}\mu_k^r\leqslant C\|f\|_{{}_p\mathscr{L}_r(X)}^r$$

此即(4.4.11)式.

(ii)⇒(i) 设鞅 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$ 满足 $E\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|df_n\|^p<\infty$，则显然 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}\in {}_p\mathscr{L}_r(X)$. 对于鞅 $(f_{m+n}-f_n)_{m\geqslant 0}$ 应用(4.4.11)式得 $\|f_{m+n}-f_n\|_r\leqslant C\|f_{m+n}-f_n\|_{{}_p\mathscr{L}_r(X)}$. 据控制收敛定理知 f_n 是 $L_r(X)$ 中的 Cauchy 序列，从而 f_n 依概率收敛，故 X 是 p 一致可光滑空间. □

定理 4.4.9 设 X 是 Banach 空间，$2\leqslant q<\infty$，$0<r\leqslant 1$，则以下条件等价：

(i) X 是 q 一致可凸空间；

(ii) $D_r(X)\subset {}_q\mathscr{L}_r(X)$ 并且存在 $C>0$，使得对每个 $D_r(X)$ 中的鞅 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$ 成立

$$\|f\|_{{}_q\mathscr{L}_r(X)}\leqslant C\|f\|_{D_r(X)} \tag{4.4.12}$$

证明 (i)⇒(ii) 假设 X 同构于 q 一致凸空间. 由定理 4.1.3，当 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}\in D_r(X)$ 时，f 有关于 $(3,r,\infty;q)$ 的原子分解 $f_n=\sum\limits_{k\in Z}\mu_k a_n^k, n\geqslant 0$，并且(4.1.16)式成立. 由于 $\sup\limits_k\|\sigma^{(q)}(a^k)\|_r<\infty$，故

$$\|\sigma^{(q)}(f)\|_r^r\leqslant\sum_{k\in Z}\mu_k^r\|\sigma^{(q)}(a^k)\|_r^r\leqslant C\|f\|_{D_r(X)}^r \tag{4.4.13}$$

不妨设 $\|\sigma^{(q)}(f)\|_r=1$，则 $(\sigma_{n+1}^{(q)}(f)^r)_{n\geqslant 0}\in\Theta$，容易验证

$$\|f\|_{{}_q\mathscr{L}_r(X)}\leqslant\Big(E\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n^{(q)}(f)^{r-q}(\sigma_n^{(q)}(f)^q-\sigma_{n-1}^{(q)}(f)^q)\Big)^{1/q} \tag{4.4.14}$$

利用初等不等式 $\lambda(\rho-1)\rho^{\lambda-1}\leqslant\rho^\lambda-1$，$(\rho\geqslant 0, 0<\lambda\leqslant 1)$. 令 $\rho=\left(\dfrac{B}{A}\right)^q$，$B^q\geqslant A^q$，$\lambda=\dfrac{r}{q}$，则得 $B^r-A^r\geqslant\dfrac{r}{q}(B^q-A^q)^{r-q}$. 取 $B=\sigma_n^{(q)}(f)$，$A=\sigma_{n-1}^{(q)}(f)$，得

$$\sigma_n^{(q)}(f)^{r-q}\Big(\sigma_n^{(q)}(f)^q-\sigma_{n-1}^{(q)}(f)^q\Big)\leqslant\frac{q}{r}\Big(\sigma_n^{(q)}(f)^r-\sigma_{n-1}^{(q)}(f)^r\Big) \tag{4.4.15}$$

将(4.4.15)式代入(4.4.14)式，再应用(4.4.13)式得

$$\|f\|_{{}_q\mathscr{L}_r(X)}\leqslant\left(\frac{q}{r}\right)^{1/q}\Big(E\sum_{n=1}^{\infty}(\sigma_n^{(q)}(f)^r-\sigma_{n-1}^{(q)}(f)^r)\Big)^{1/q}$$
$$\leqslant C\|f\|_{D_r(X)}$$

于是(4.4.12)式得证，这说明 $D_r(X)\subset {}_q\mathscr{L}_r(X)$.

(ii)⇒(i) 设 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$ 为 X 值 Walsh-Paley 鞅，满足 $\sup\|f_n\|_\infty<\infty$，则 $\|f\|_{D_r(X)}<\infty$. 由 Hölder 不等式得

$$\|S^{(q)}(f)\|_r^r=E(S^{(q)}(f)^r\theta_\infty^{(r-q)/q}\theta_\infty^{(q-r)/q})$$
$$\leqslant[E(\theta^{1-q/r}S^{(q)}(f))]^{r/q}$$

由 $\theta\in\Theta$ 的任意性及(4.4.12)式，得 $\|S^{(q)}(f)\|_r\leqslant\|f\|_{{}_q\mathscr{L}_r(X)}\leqslant C\|f\|_{D_r(X)}<\infty$. 于是 $S^{(q)}(f)<\infty$，a.e. 故 X 是 q 一致可凸空间. □

第五章　鞅 Hardy 空间的共轭($0<r\leqslant 1$)

在经典调和分析中，函数 Lipschitz 空间通常被用来刻画 Hardy 空间 H_p ($0<p\leqslant 1$) 的共轭空间. 1969 年，Duren—Romberg—Shields[32] 首先对一维情况建立了共轭定理. 1973 年，Walsh 将其推广到多维的情况. 1977 年，Coifman-Weiss[23] 又将原子分解这一重要工具引入函数 H_p 空间的共轭理论研究.

众所周知，鞅与解析(或者调和)函数之间具有密切联系(Doob[29]). 实际上，有关函数 H_p 理论中的许多结论在鞅的 H_p 空间中都有很好的对应. 在鞅论中，Lipschitz 空间 ${}_p\lambda^\beta$ 和 ${}_p\Lambda^\beta$ 最早是由 Herz[47] 引入的. 对实值鞅，他证明了 $({}_2H_r^\sigma)^* = {}_2\lambda^\beta$ and $({}_2H_r^S)^* \supset {}_2\Lambda^\beta$，其中 $0<r\leqslant 1$，$\beta=\frac{1}{r}-1$ (也可参见 Long[66] 和 Weisz[79]). 应用不同的方法和技巧，也可得到 $({}_2H_r^\sigma)^* = {}_2\mathscr{L}_{r'}$ 与 $({}_2H_r^S)^* \supset {}_2L_{r'}$，其中 $r'<0$，$\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1$. 进一步，Herz[47] 证明了 ${}_2\lambda^\beta$ 与 ${}_2\mathscr{L}_a$；${}_2\Lambda^\beta$ 与 ${}_2L_a$ (其中 $0\leqslant\beta=-\frac{1}{a}$)是相互等价的.

一个自然的问题是对于一般 Banach 空间值的鞅空间，情形又将如何？这在以往的文献中尚未见研究. 然而，作为向量值调和分析的组成部分，弄清这一问题是十分必要的. 本章首先引入了 B 值鞅空间 ${}_p\lambda^\beta(X)$ 与 ${}_p\Lambda^\beta(X)$，${}_p\mathscr{L}_a(X)$ 与 ${}_pL_a(X)$，然后分别研究了 ${}_p\lambda^\beta(X)$ 与 ${}_p\mathscr{L}_a(X)$，${}_p\Lambda^\beta(X)$ 与 ${}_pL_a(X)$ 的相互嵌入关系，而后讨论了 ${}_p\lambda^\beta(X)$ 与 ${}_pH_r^\sigma(X)$，${}_pQ_r(X)$ 和 $D_r(X)$ ($0<r\leqslant 1$) 的共轭

之间的相互关系. 同时，还研究了 ${}_p\mathscr{L}_a(X)$，${}_pL_a(X)$ 与 ${}_pH_r^\sigma(X)$，${}_pH_r^S(X)$ 和 ${}_pQ_r(X)$ 及其共轭空间之间的关系. 结果表明，与实值鞅不同的是，此时在上述空间中所出现的指标 p 具有一定的几何意义，即这些空间或共轭空间之间的相互嵌入关系与它们取值的 Banach 空间的凸性和光滑性具有密切的联系. 作为特例，当 $p=2$，X 同构于 Hilbert 空间时，所得结果与实值鞅空间的相应结论是一致的. 当 X 同构于 p 一致光滑空间时，为求证某种 Lipschitz 空间连续嵌入 ${}_pH_r^\sigma(X)$ 的共轭空间，这里利用了上一章中所建立的原子分解方法.

§5.1　${}_p\lambda^\beta(X)$ 与 ${}_p\mathscr{L}_a(X)$，${}_p\Lambda^\beta(X)$ 与 ${}_pL_a(X)$

本节将主要讨论鞅空间 ${}_p\lambda^\beta(X)$ 与 ${}_p\mathscr{L}_a(X)$，${}_p\Lambda^\beta(X)$ 与 ${}_pL_a(X)$ 的相互嵌入关系. 首先，引入 X-值 Lipschitz 鞅空间的定义.

设 $\mathscr{A}^{(n)}$ 为 $\mathscr{F}_n$，$n\geqslant 0$ 中所有原子的集合，记 $\omega_n=\sum P(I^{(n)})\chi_{I^{(n)}}$，其中的和取遍所有的 $I^{(n)}\in\mathscr{A}^{(n)}$. 若 $0<p<\infty$，$\beta\geqslant 0$，则 X-值 Lipschitz 鞅空间 ${}_p\lambda^\beta(X)$ 和 ${}_p\Lambda^\beta(X)$ ($\beta\geqslant 0$) 定义如下：

$$ {}_p\lambda^\beta(X)=\left\{\begin{array}{l} f=(f_n)_{n\geqslant 0}: f_n\text{是 } L^p(X)\text{ 可积鞅并且} \\ \sup\limits_n\left\|\omega_n^{-\beta}\sup\limits_{m\geqslant n}\left(E(\|f_m-f_n\|^p\mid\mathscr{F}_n)\right)^{1/p}\right\|_\infty<\infty \end{array}\right\} $$

$$ \|f\|_{{}_p\lambda^\beta(X)}=\sup_n\left\|\omega_n^{-\beta}\sup_{m\geqslant n}\left(E(\|f_m-f_n\|^p\mid\mathscr{F}_n)\right)^{1/p}\right\|_\infty $$

$$ {}_p\Lambda^\beta(X)=\left\{\begin{array}{l} f=(f_n)_{n\geqslant 0}: f_n\text{是 } L^p(X)\text{ 可积鞅并且} \\ \sup\limits_n\left\|\omega_n^{-\beta}\sup\limits_{m\geqslant n}\left(E(\|f_m-f_{n-1}\|^p\mid\mathscr{F}_n)\right)^{1/p}\right\|_\infty<\infty \end{array}\right\} $$

$$ \|f\|_{{}_p\Lambda^\beta(X)}=\sup_n\left\|\omega_n^{-\beta}\sup_{m\geqslant n}\left(E(\|f_m-f_{n-1}\|^p\mid\mathscr{F}_n)\right)^{1/p}\right\|_\infty $$

容易验证，当 $1\leqslant p<\infty$，$\beta\geqslant 0$ 时，有

$$ \|f\|_{{}_p\lambda^\beta(X)}=\sup_\tau P(\tau\neq\infty)^{-\frac{1}{p}-\beta}\|f-f^\tau\|_p $$

其中的"sup"取遍所有停时"τ". 令

$$R=\left\{\begin{array}{c} r=(r_n)_{n\geqslant 0}: r_n \text{是非负不减适应序列} \\ \text{并且 } E(r_\infty)\leqslant 1 \end{array}\right\}$$

若 $0<p\leqslant \alpha<\infty$ 或 $-\infty\leqslant\alpha<0$，定义

$${}_p\mathscr{L}_\alpha(X)=\left\{\begin{array}{l} f=(f_n)_{n\geqslant 0}: \|f\|_{{}_p\mathscr{L}_\alpha(X)} \\ =\sup\limits_{r\in R}\left(E\sum\limits_{n=1}^{\infty} r_{n-1}^{1-p/\alpha}\|df_n\|^p\right)^{1/p}<\infty \end{array}\right\}$$

$${}_pL_\alpha(X)=\left\{\begin{array}{l} f=(f_n)_{n\geqslant 0}: \|f\|_{{}_pL_\alpha} \\ =\sup\limits_{r\in R}\left(E\sum\limits_{n=1}^{\infty} r_{n}^{1-p/\alpha}\|df_n\|^p\right)^{1/p}<\infty \end{array}\right\}$$

若 γ 满足条件 $\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{\alpha}\geqslant 0$，则记

$$G_p^\alpha=\left\{\begin{array}{l} g=(g_n)_{n\geqslant 0}: g_n \text{ 是适应序列} \\ \text{且 } g_n\in L^\gamma,\ E(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\|g_n\|^p)^{\gamma/p}\leqslant 1 \end{array}\right\}$$

则当 $1<p\leqslant\alpha<\infty$ 或 $-\infty\leqslant\alpha<0$ 时，有

$$\|f\|_{{}_p\mathscr{L}_\alpha(X)}=\sup_{g\in G_p^\alpha}\left(E\left(\sum_n\|g_n\|^p\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\|df_k\|^p\right)\right)\right)^{1/p}$$

$$\|f\|_{{}_pL_\alpha(X)}=\sup_{g\in G_p^\alpha}\left(E\left(\sum_n\|g_n\|^p\left(\sum_{k=n}^{\infty}\|df_k\|^p\right)\right)\right)^{1/p}$$

上述两式的证明与实值鞅的情况类似（参见 Long[66]，Weisz[79]），此处省略.

定理 5.1.1 假设 $1<p\leqslant 2$，$-\infty\leqslant\alpha<0$ 或 $\alpha=\infty$，$\beta=-\dfrac{1}{\alpha}\geqslant 0$，且 X 同构于 p 一致光滑空间，则

(i) ${}_p\mathscr{L}_\alpha(X)\subset {}_p\lambda^\beta(X)$，且存在常数 $C=C_{p,\alpha}>0$，使得对任意 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}\in {}_p\mathscr{L}_\alpha(X)$ 有

$$\|f\|_{{}_p\lambda^\beta(X)}\leqslant C\|f\|_{{}_p\mathscr{L}_\alpha(X)} \tag{5.1.1}$$

(ii) ${}_pL_\alpha(X)\subset {}_p\Lambda^\beta(X)$，且存在常数 $C=C_{p,\alpha}>0$，使得对任意 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}\in {}_pL_\alpha(X)$ 有

$$\|f\|_{{}_p\Lambda^\beta(X)}\leqslant C\|f\|_{{}_pL_\alpha(X)} \tag{5.1.2}$$

证明　这里仅证结论(i)，结论(ii)类似可证. 设 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}\in {}_p\mathscr{L}_\alpha(X)$ 且对于任意的 $m\in N$，$A\in\mathscr{F}_m$，令 $g=(g_n)_{n\geqslant 0}$，其中

$$g_m=P(A)^{-1/\gamma}\chi_A,\quad g_n=0,\ n\neq m,\quad \frac{1}{\gamma}=\frac{1}{p}-\frac{1}{\alpha}>0$$

则 $g\in G_p^\alpha$. 由 X 的 p 一致光滑性知，X 具有 RN(Radon－Nikodym) 性质，故 f_n 是 L_p 收敛，不妨仍以 f 记其极限. 据定理 2.4.12 有

$$\begin{aligned}\|f\|_{{}_p\mathscr{L}_\alpha(X)}&\geqslant E\left(\sum_{n=0}^{\infty}\|g_n\|^p\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\|df_k\|^p\right)\right)^{1/p}\\&=E\left(\|g_m\|^p\left(\sum_{k=m+1}^{\infty}\|df_k\|^p\right)\right)^{1/p}\\&=E\left(P(A)^{-p/\gamma}\chi_A\left(\sum_{k=m+1}^{\infty}\|df_k\|^p\right)\right)^{1/p}\\&\geqslant C^{1/p}P(A)^{1/\gamma}\left(\frac{1}{P(A)}\int_A E\left(\|f-f_m\|^p\mid\mathscr{F}_m\right)\mathrm{d}P\right)^{1/p}\end{aligned}$$

于是

$$\left(\frac{1}{P(A)}\int_A E(\|f-f_m\|^p\mid\mathscr{F}_m)\mathrm{d}P\right)^{1/p}\leqslant C_{p,\alpha}\|f\|_{{}_p\mathscr{L}_\alpha(X)}P(A)^\beta$$

既然 $\beta\geqslant 0$，因此当 A 不含 $\mathscr{F}_m$ 原子时，若令 $P(A)$ 充分小，则知 $E(\|f-f_m\|^p\mid\mathscr{F}_m)\chi_A$ 亦可充分小，此即 $E(\|f-f_m\|^p\mid\mathscr{F}_m)\chi_A=0$，$\forall A\in\mathscr{F}_m$，$A$ 不含 $\mathscr{F}_m$ 原子. 另一方面，当 $A=I$ 是一个 $\mathscr{F}_m$ 原子时

$$\left(\frac{1}{P(I)}\int_I(\|f-f_m\|^p\mid\mathscr{F}_m)\mathrm{d}P\right)^{1/p}\leqslant C_{p,\alpha}\|f\|_{{}_p\mathscr{L}_\alpha(X)}P(I)^\beta$$

这两方面的事实说明

$$E(\|f-f_m\|^p\mid\mathscr{F}_m)^{1/p}\leqslant C_{p,\alpha}\|f\|_{{}_p\mathscr{L}_\alpha(X)}\cdot\omega_n^\beta$$

从而

$$\|f\|_{{}_p\lambda^\beta}=\sup_n\|\omega_n^{-\beta}E(\|f-f_m\|^p\mid\mathscr{F}_m)^{1/p}\|_\infty\leqslant C_{p,\alpha}\|f\|_{{}_p\mathscr{L}_\alpha(X)}$$

即 ${}_p\mathscr{L}_a(X)$ 连续嵌入 ${}_p\lambda^\beta(X)$. □

定理 5.1.2 假设 $2\leqslant q<\infty$, $-\infty\leqslant a<0$ 或 $a=\infty$, $\beta=-\frac{1}{a}\geqslant 0$, X 同构于 q 一致凸空间,则

(i) ${}_q\lambda^\beta(X)\subset {}_q\mathscr{L}_a(X)$, 并且存在 $C=C_{q,a}>0$, 使得每一个 $f\in {}_q\lambda^\beta(X)$ 满足

$$\|f\|_{{}_q\mathscr{L}_a(X)}\leqslant C\|f\|_{{}_q\lambda^\beta} \qquad (5.1.3)$$

(ii) ${}_q\Lambda^\beta(X)\subset {}_qL_a(X)$, 并且存在 $C=C_{q,a}>0$, 使得每一个 $f\in {}_q\Lambda^\beta(X)$ 满足

$$\|f\|_{{}_qL_a}\leqslant C\|f\|_{{}_q\Lambda^\beta} \qquad (5.1.4)$$

证明 这里仅证(i),类似地可证明(ii). 设 $f=(f_n)\in {}_q\lambda^\beta(X)$, 根据 X 的 q 一致凸性, 据定理 2.4.11 得

$$\|f\|^q_{{}_q\mathscr{L}_a(X)}=\sup_{g\in G_q^a}E\sum_{n=0}^{\infty}\|g_n\|^q\Big(\sum_{k=n+1}^{\infty}\|df_k\|^q\Big)$$

$$\leqslant \sup_{g\in G_q^a}E\sum_{n=0}^{\infty}\|g_n\|^qC_1\sup_{m>n}(\|f_m-f_n\|^q\mid\mathscr{F}_n)$$

$$=C\sup_{g\in G_q^a}E\sum_{n=0}^{\infty}\|g_n\|^q\omega_n^{q\beta}\Big(\omega_n^{-\beta}\sup_{m>n}(E(\|f_m-f_n\|^q\mid\mathscr{F}_n))^{1/q}\Big)^q$$

$$\leqslant C\|f\|^q_{{}_q\lambda^\beta}\sup_{g\in G_q^a}E\sum_{n=0}^{\infty}\|g_n\|^q\omega_n^{q\beta} \qquad (5.1.5)$$

设 $r_n=\Big(\sum_{k\leqslant n}\|g_k\|^q\Big)^{\gamma/q}$, $\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{q}-\frac{1}{a}>0$, 则 $E(r_n)\leqslant 1$, $r_n\omega_n\leqslant 1$, $\omega_n\leqslant r_n^{-1}$, 于是

$$\sum_{n=0}^{\infty}\|g_n\|^q\omega_n^{q\beta}\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}(r_n^{1-q/a}-r_{n-1}^{1-q/a})r_n^{q/a}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\Big((r_n^{1/q-1/a})^q-(r_{n-1}^{1/q-1/a})^q\Big)(r_n^{1/q-1/a})^{t-q} \qquad (5.1.6)$$

其中 t 满足 $\frac{a-q}{qa}(t-q)=\frac{q}{a}$, $t=\frac{qa}{a-q}\leqslant q$, $t(\frac{1}{q}-\frac{1}{a})=1$. 利用下述初等不等式

$$\lambda(\rho-1)\rho^{\lambda-1}\leqslant\rho^\lambda-1\quad(\rho\geqslant 1,0<\lambda\leqslant 1)\qquad(5.1.7)$$

取 $\rho=(\frac{B}{A})^q$, $B^q\geqslant A^q$, $\lambda=\frac{t}{q}$, 得

$$(B^q-A^q)B^{t-q}\leqslant\frac{q}{t}(B^t-A^t)\quad(0\leqslant t\leqslant q)$$

取 $B=r_n^{1/q-1/a}$, $A=r_{n-1}^{1/q-1/a}$, 则

$$((r_n^{1/q-1/a})^q-(r_{n-1}^{1/q-1/a})^q)(r_n^{1/q-1/a})^{t-q}$$

$$\leqslant\frac{q}{t}((r_n^{1/q-1/a})^t-(r_{n-1}^{1/q-1/a})^t)$$

再由(5.1.6)式得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\|g_n\|^q\omega_n^{q\beta}\leqslant\frac{q}{t}\sum_{n=1}^{\infty}((r_n^{1/q-1/a})^t-(r_{n-1}^{1/q-1/a})^t)$$

$$=\frac{q}{t}\sum_{n=1}^{\infty}(r_n-r_{n-1})$$

从而

$$\|f\|^q_{{}_q\mathscr{L}_a(X)}\leqslant C\|f\|^q_{{}_q\lambda^\beta}\sup_{r\in R}\frac{q}{t}E\sum_{n=1}^{\infty}(r_n-r_{n-1})$$

$$\leqslant C\frac{q}{t}\|f\|^q_{{}_q\lambda^\beta}\sup_{r\in R}E(r_\infty)$$

$$\leqslant C\|f\|^q_{{}_q\lambda^\beta}$$

即 ${}_q\lambda^\beta(X)$ 连续嵌入 ${}_q\mathscr{L}_a(X)$. □

根据 Kwapien 定理, X 同构于 Hilbert 空间时, X 既是 2 一致凸的,又是 2 一致光滑的,从而有:

推论 5.1.1 假设 $-\infty\leqslant a<0$ 或者 $a=\infty$, $\beta=-\frac{1}{a}\geqslant 0$, X 同构于 Hilbert 空间,则 ${}_2\lambda^\beta(X)\sim{}_2\mathscr{L}_a(X)$, ${}_2\Lambda^\beta(X)\sim{}_2L_a(X)$.

§5.2 ${}_p\lambda^\beta(X)$ 与 ${}_pH_r^\sigma(X)$，${}_pQ_r(X)$，$D_r(X)$ 的共轭

本节将讨论 Lipschitz 空间 ${}_p\lambda^\beta(X)$ 与小指标 Hardy 鞅空间 ${}_pH_r^\sigma(X)$，${}_pQ_r(X)$ 和 $D_r(X)(0<r\leqslant 1)$ 的共轭 ${}_pH_r^\sigma(X)^*$，${}_pQ_r(X)^*$ 和 $D_r(X)^*$ 的相互关系. 这里主要将用到在第四章中所介绍的原子分方法.

定理 5.2.1 假设 $1<p\leqslant 2$，$0<r\leqslant 1$，且 X 同构于 p 一致光滑空间，则在等距同构意义下 ${}_q\lambda^\beta(X^*)$ 连续嵌入 ${}_pH_r^\sigma(X)$ 与 ${}_pQ_r(X)$ 的共轭空间，其中 $q=\dfrac{p}{p-1}$，$\beta=\dfrac{1}{r}-\dfrac{2}{q}\geqslant 0$.

证明 (i) 往证 ${}_q\lambda^\beta(X^*)\subset{}_pH_r^\sigma(X)^*$. 若 $f\in{}_pH_p^\sigma(X)\subset{}_pH_r^\sigma(X)$，则存在停时 τ_k，$(1,p,r,\infty)$ 原子 a^k 及实数 μ_k，$k\in Z$，使得

$$\sum_{k\in Z}\mu_k a^k=\sum_{k\in Z}(f^{\tau_{k+1}}-f^{\tau_k})=f$$

这里的级数在 ${}_pH_p^\sigma(X)$ 中收敛. 由定理 2.4.11 知 ${}_pH_p^\sigma(X)\subset L_p(X)$，由于 ${}_q\lambda^\beta(X^*)\subset L_q(X^*)$，则

$$E(f\varphi)=\sum_{k\in Z}\mu_k E(a^k\varphi),\qquad f\in{}_pH_p^\sigma(X),\qquad \varphi\in{}_q\lambda^\beta(X^*)$$

有意义. 由原子 a^k 的定义，$E(a^k\varphi)=E(a^k(\varphi-\varphi^{\tau_k}))$. 利用 Hölder 不等式与 X 的 p 一致光滑性，得

$$\begin{aligned}|l_\varphi(f)|&\leqslant\sum_{k\in Z}|\mu_k||E(a^k\varphi)|\\&\leqslant\sum_{k\in Z}|\mu_k|\ \|a^k\|_p\|\varphi-\varphi^{\tau_k}\|_q\\&\leqslant\sum_{k\in Z}|\mu_k|C_p\|\sigma^{(p)}(a^k)\|_p\|\varphi-\varphi^{\tau_k}\|_q\\&=C_p\sum_{k\in Z}|\mu_k|(E\sigma^{(p)}(a^k)^pP(\tau_k\neq\infty))^{\frac{1}{p}}\|\varphi-\varphi^{\tau_k}\|_q\\&\leqslant C_p\sum_{k\in Z}|\mu_k|P(\tau_k\neq\infty)^{-\frac{1}{r}+\frac{1}{p}}\|\varphi-\varphi^{\tau_k}\|_q\\&\leqslant C_p\sum_{k\in Z}|\mu_k|\ \|\varphi\|_{{}_q\lambda^\beta(X)}\end{aligned}$$

其中 $\beta=\dfrac{1}{r}-\dfrac{2}{q}$，$C_p>0$ 为仅与 p 有关的常数，由于 $0<r\leqslant 1$，于是

$$|l_\varphi(f)|^r\leqslant C\sum_{k\in Z}|\mu_k|^r\|\varphi\|^r_{{}_q\lambda^\beta(X)}$$

$$|l_\varphi(f)|\leqslant C\|f\|_{{}_pH_r^\sigma(X)}\|\varphi\|_{{}_q\lambda^\beta(X)}\tag{5.2.1}$$

其中 $C>0$ 为仅与 p,r 有关的常数. 这说明 l_φ 可连续地延拓为 ${}_pH_r^\sigma(X)$ 上的连续泛函，且 $\|l_\varphi\|\leqslant C\|\varphi\|_{{}_q\lambda^\beta(X)}$. 即在等距同构意义下 ${}_q\lambda^\beta(X^*)$ 连续嵌入 ${}_pH_r^\sigma(X)^*$.

(ii) 往证 ${}_q\lambda^\beta(X^*)\subset{}_pQ_r(X)^*$. 注意到 ${}_pQ_p(x)\subset{}_pQ_r(X)$，${}_pQ_p(X)\subset L_p(X)$，${}_q\lambda^\beta(X^*)\subset L_q(X^*)$. 类似(5.2.1)式可证

$$|l_\varphi(f)|\leqslant C\|f\|_{{}_pQ_r(X)}\|\varphi\|_{{}_q\lambda^\beta(X)}$$

$$f\in{}_pQ_p(X),\qquad \varphi\in{}_q\lambda^\beta(X^*)$$

这说明 l_φ 可连续地延拓为 ${}_pQ_r(X)$ 上的连续泛函，且 $\|l_\varphi\|\leqslant C\|\varphi\|_{{}_q\lambda^\beta(X)}$. 即在等距同构意义下 ${}_q\lambda^\beta(X^*)$ 连续嵌入 ${}_pQ_r(X)^*$.

□

定理 5.2.2 (i)若 X 具有 RN 性质，$0<r\leqslant 1$，则

$${}_2\lambda^\beta(X^*)\subset D_r(X)^*,\qquad 其中\ \beta=\frac{1}{r}-1$$

(ii)若 X 是自反的，$0<r\leqslant 1$，则

$${}_1\lambda^\beta(X^*)\subset D_r(X)^*,\qquad 其中\ \beta=\frac{1}{r}-2$$

证明 (i) 设 X 具有 RN 性质. 注意到 $D_2(X)\subset D_r(X)$，$D_2(X)\subset L_2(X)$，${}_2\lambda^\beta(X^*)\subset L_2(X^*)$. 类似(5.2.1)式可证

$$|l_\varphi(f)|\leqslant C\|f\|_{D_r(X)}\|\varphi\|_{{}_2\lambda^\beta(X)}$$

$$f\in D_2(X),\varphi\in{}_2\lambda^\beta(X^*)$$

这说明 l_φ 可连续地延拓为 $D_r(X)$ 上的连续泛函，且 $\|l_\varphi\|\leqslant C\|\varphi\|_{{}_2\lambda^\beta(X)}$. 即在等距同构意义下 ${}_2\lambda^\beta(X^*)$ 连续嵌入 $D_r(X)^*$，

其中 $\beta=\dfrac{1}{r}-1$.

(ii) 设 X 是自反的,注意到 $L_\infty(X)\subset D_r(X)$,${}_1\lambda^\beta(X^*)\subset L_1(X^*)$,$L_\infty(X)=L_\infty(X^{**})$.类似(5.2.1)式可证

$$|l_\varphi(f)|\leqslant C\|f\|_{D_r(X)}\|\varphi\|_{{}_1\lambda^\beta(X)}$$

$$f\in L_\infty(X),\quad \varphi\in{}_1\lambda^\beta(X^*)$$

这说明 l_φ 可连续地延拓为 $D_r(X)$ 上的连续泛函,且 $\|l_\varphi\|\leqslant C\|\varphi\|_{{}_1\lambda^\beta(X)}$.即在等距同构意义下 ${}_1\lambda^\beta(X^*)$ 连续嵌入 $D_r(X)^*$,其中 $\beta=\dfrac{1}{r}-2$. □

定理 5.2.3 假设 $2\leqslant q<\infty$,$0<r\leqslant\dfrac{1}{2}$;或者 $2\leqslant q\leqslant\dfrac{2r}{2r-1}$,$\dfrac{1}{2}<r\leqslant 1$,$X$ 同构于 q 一致凸空间,则 ${}_qH_r^\sigma(X)$ 的共轭空间 ${}_qH_r^\sigma(X)^*$ 在等距同构意义下连续嵌入 ${}_p\lambda^\beta(X^*)$,其中 $p=\dfrac{q}{q-1}$,$\beta=\dfrac{1}{r}-\dfrac{2}{p}\geqslant 0$.

证明 设 $l\in{}_qH_r^\sigma(X)^*$ 为 ${}_qH_r^\sigma(X)$ 的共轭空间中任一元素,只需证明存在 $\varphi\in{}_p\lambda^\beta(X^*)$,使得 $l=l_\varphi$,并且 $\|\varphi\|_{{}_p\lambda^\beta(X)}\leqslant\|l\|$ 即可.首先,由 $0<r\leqslant 1$,$0<\dfrac{1}{q}<1$,得

$$\begin{aligned}\|f\|_{{}_q\Sigma_r}&=\|\sigma^{(q)}(f)\|_r\\&\leqslant\|\sigma^{(q)}(f)\|_1\\&=E\Big(\sum_{n=1}^\infty E(\|df_n\|^q\mid\mathscr{F}_{n-1})\Big)^{1/q}\\&\leqslant\Big(E\Big(\sum_{n=1}^\infty E(\|df_n\|^q\mid\mathscr{F}_{n-1})\Big)\Big)^{1/q}\\&=\Big(E\Big(\sum_{n=1}^\infty\|df_n\|^q\Big)\Big)^{1/q}\leqslant C\|f\|_q\end{aligned}$$

于是 $L_q(X)\subset{}_qH_r^\sigma(X)$.从而,存在 $\varphi\in L_p(X^*)$,使得 $l(f)=$

$E(f\varphi)$,$f\in L_q(X)$.设 τ 为任一停时,$b=\varphi-\varphi^\tau$,则 $b\in L_p(X^*)$.$\forall\varepsilon>0$,存在 $a_\varepsilon\in L_q(X^{**})$,$\|a_\varepsilon\|_q<1+\varepsilon$,使得

$$\|b\|_p=\|b-b^\tau\|_p=E((b-b^\tau)a_\varepsilon)=E(b(a_\varepsilon-a_\varepsilon^\tau))$$

一致凸空间是自反的,故上述 $a_\varepsilon\in L_q(X)$.特别地,存在 $a\in L_q(X)$,$\|a\|_q\leqslant 2$,使得 $\|b\|_p=E(b(a-a^\tau))$.令

$$g=\frac{a-a^\tau}{C_q4P(\tau\neq\infty)^{1/r-1/p}}\quad(\text{常数 } C_q \text{ 待定})\tag{5.2.2}$$

虽然 g 不是原子,但有 $\sigma^{(q)}(g)=\sigma^{(q)}(g)\chi(\tau\neq\infty)$.据 Hölder 不等式,得

$$\begin{aligned}\|g\|_{{}_q\Sigma_r}&=\frac{(E\sigma^{(q)}(a-a^\tau)^r\chi(\tau\neq\infty))^{1/r}}{C_q4P(\tau\neq\infty)^{1/r-1/p}}\\&\leqslant\frac{((E(\sigma^{(q)}(a-a^\tau))^q)^{r/q}P(\tau\neq\infty)^{1-r/q})^{1/r}}{C_q4P(\tau\neq\infty)^{1/r-1/p}}\\&\leqslant\frac{1}{4C_q}(E(\sigma^{(q)}(a-a^\tau)^q)^{1/q}P(\tau\neq\infty)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\\&\leqslant\frac{C'_q}{4C_q}\|a-a^\tau\|_q\leqslant 1\quad(\text{选取 } C_q=C'_q>0)\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\|l\|\geqslant|l(g)|&=E(g\varphi)=E(g(\varphi-\varphi^\tau))=E(gb)\\&=E\Big(\frac{a-a^\tau}{4P(\tau\neq\infty)^{1/r-1/p}}b\Big)\\&=\frac{1}{4}\|b\|_pP(\tau\neq\infty)^{-1/r+1/p}\\&=\frac{1}{4}\|\varphi-\varphi^\tau\|_pP(\tau\neq\infty)^{-1/r+1/p}\\&=\frac{1}{4}\|\varphi-\varphi^\tau\|_pP(\tau\neq\infty)^{-\frac{1}{r}-(\frac{1}{r}-\frac{2}{p})}\\&=\frac{1}{4}\|\varphi\|_{{}_p\lambda^\beta(X)}\end{aligned}\tag{5.2.3}$$

即在等距同构定义下 ${}_qH_r^\sigma(X)^*$ 连续嵌入 ${}_p\lambda^\beta(X^*)$. □

推论 5.2.1 假设 $0<r\leqslant 1$,$\beta=\dfrac{1}{r}-1$,X 同构于 Hilbert 空

间，则 ${}_2H_r^{\alpha}(X)^* \sim {}_2\lambda^{\beta}(X)$.

注*：设 $X=R$ 为实数空间，$\mathscr{F}=\{\varnothing,\Omega\}$，$\mathscr{F}_1=\mathscr{F}_2=\cdots=\mathscr{F}$. 则 $D_r(R)={}_2Q_r(R)=L_\infty(R)\quad(0<r<\infty)$，${}_2\lambda^{\beta}(R)=L_2(R)$，${}_1\lambda^{\beta}(R)=L_1(R)$. 已知 $L_\infty(R)^* \supsetneqq L_1(R)$，于是 ${}_2Q_r(R)^*$ 不能连续嵌入 ${}_2\lambda^{\beta}(R)$，$D_r(R)^*$ 不能连续嵌入 ${}_1\lambda^{\beta}(R)$（参见 Weisz[66]）.

下面考虑 ${}_qQ_r(X)^*$ 和 $D_r(X)^*$ 的子空间，定义为：

$$({}_qQ_r(X)^*)_p=\left\{\begin{array}{l} l\in{}_qQ_r(X)^*:\exists\varphi\in L_p(X^*)\ \text{使得} \\ l(f)=E(f\varphi),\qquad\forall\ f\in L_\infty(X)\end{array}\right\},\ p\geqslant 1$$

$$(D_r(X)^*)_1=\left\{\begin{array}{l} l\in(D_r(X))^*:\exists\ \varphi\in L_1(X^*)\ \text{使得} \\ l(f)=E(f\varphi),\qquad\forall\ f\in L_\infty(X)\end{array}\right\}$$

定理5.2.4 假设 $2\leqslant q<\infty$，$0<r\leqslant\frac{1}{2}$；或者 $2\leqslant q\leqslant\frac{2r}{2r-1}$，$\frac{1}{2}<r\leqslant 1$，$X$ 同构于 q 一致凸空间，则 $({}_qQ_r(X)^*)_p$ 在等距同构意义下连续嵌入 ${}_p\lambda^{\beta}(X^*)$，其中 $p=\frac{q}{q-1}$，$\beta=\frac{1}{r}-\frac{2}{p}\geqslant 0$.

证明　注意到 $L_\infty(X)\subset{}_qQ_r(X)$，由定义，$\forall\ l\in({}_qQ_r(X)^*)_p$，$\exists\,\varphi\in L_p(X^*)$，使得

$$l_\varphi(f)=E(f\varphi),\qquad f\in L_\infty(X)$$

代替(5.2.2)式中的 g，令 $h=\dfrac{a-a^\tau}{4C_qP(\tau\neq\infty)^{1/r}}$　（常数 C_q 待定），于是

$$\begin{aligned}S^{(q)}(h)&=\frac{S^{(q)}(a-a^\tau)}{4C_qP(\tau\neq\infty)^{1/r}}\\&\leqslant\frac{C_q'\ \|a-a^\tau\|_q}{4C_qP(\tau\neq\infty)^{1/r}}\\&\leqslant P(\tau\neq\infty)^{-1/r},\qquad(\text{选取 } C_q=C_q'>0)\end{aligned}$$

即 $\|S^{(q)}(h)\|_\infty\leqslant P(\tau\neq\infty)^{-1/r}$，$h$ 是 $(2,q,r,\infty)$ 原子. 令 $\lambda_{n-1}=\|S^{(q)}(h)\|_\infty\chi(\tau<n)$，则

$$\begin{aligned}E(|\lambda_\infty|^r)&=E(\|S^{(q)}(h)\|_\infty^r\chi(\tau<\infty))\\&\leqslant P(\tau<\infty)^{-1}P(\tau<\infty)=1\end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned}S_n^{(q)}(h)&=S_n^{(q)}(h)(\chi(n\leqslant\tau)+\chi(n>\tau))\\&\leqslant\|S^{(q)}(h)\|_\infty\chi(n>\tau)=\lambda_{n-1}\end{aligned}$$

故 $\|h\|_{{}_qQ_r(X)}\leqslant\|\lambda_\infty\|_r\leqslant 1$. 类似(5.2.3)式有，$\|l\|\geqslant|l(h)|=\frac{1}{4}\|\varphi\|_{{}_p\lambda^\beta}$. 即 $({}_qQ_r(X)^*)_p$ 在等距同构意义下连续嵌入 ${}_p\lambda^\beta(X^*)$

. □

定理 5.2.5 设 $0<r\leqslant 1$，X 是自反 Banach 空间，则 $(D_r(X)^*)_1$ 在等距同构意义下连续嵌入 ${}_1\lambda^\beta(X^*)$. 其中 $\beta=\frac{1}{r}-2\geqslant 0$.

证明　注意到 $L_\infty(X)\subset D_r(X)$，由定义，$\forall\,l\in(D_r(X)^*)_1$，$\exists\,\varphi\in L_1(X^*)$，使得

$$l_\varphi(f)=E(f\varphi),\qquad f\in L_\infty(X)$$

设 τ 为任一停时，$b=\varphi-\varphi^\tau\in L_1(X^*)$. 存在 $a\in L_\infty(X^{**})=L_\infty(X)$，$\|a\|_\infty\leqslant 2$，使得

$\|b\|_1=\|b-b^\tau\|_1=E(b(a-a^\tau))$. 令

$$h=\frac{1}{4}P(\tau\neq\infty)^{-1/r}(a-a^\tau)$$

则 $\|h^*\|_\infty\leqslant P(\tau\neq\infty)^{-1/r}$，$h$ 是 $(3,r,\infty)$ 原子. 令 $\lambda_{n-1}=\|h^*\|_\infty\chi(\tau<n)$，则

$$E(|\lambda_\infty|^r)=E(\|h^*\|_\infty^r\chi(\tau<\infty))\leqslant 1$$

因而

$$\begin{aligned}h_n^*&=h_n^*(\chi(n\leqslant\tau)+\chi(n>\tau))\\&\leqslant\|h^*\|_\infty\chi(n>\tau)=\lambda_{n-1}\end{aligned}$$

故 $\|h\|_{D_{(X)}}\leqslant\|\lambda_\infty\|_r\leqslant 1$. 类似(5.2.3)式有，$\|l\|\geqslant|l(h)|=\frac{1}{4}\|\varphi\|_{{}_1\lambda^\beta(X)}$. 即 $(D_r(X)^*)_1$ 在等距同构意义下连续嵌入

$_1\lambda^\beta(X^*)$. □

注意到，当 X 同构于 q 一致凸空间时，$_qQ_r(X)\supset D_r(X)$，$(2\leqslant q<\infty)$. 故进一步有如下推论.

推论 5.2.2 设 $2\leqslant q<\infty$，$0<r\leqslant 1$，X 同构于 q 一致凸空间，则 $({}_qQ_r(X)^*)_1\subset {}_1\lambda^\beta(X^*)$.

§5.3 若干鞅空间的相互关系及其共轭

前文已证，当 X 同构于 q 一致凸空间时，$_qH^\sigma_r(X)^*\subset {}_p\lambda^\beta(X^*)$，并且 $({}_qQ_r(X)^*)_p\subset {}_p\lambda^\beta(X^*)$. 本节将证明 $_p\mathscr{L}_r'(X)\subset {}_qH^\sigma_r(X)^*$，$_pL_r'(X)\subset {}_qQ_r(X)^*$.

设 $0<r\leqslant p<\infty$，定义 B 值鞅的下述空间：

$${}_p\mathscr{L}_r(X)=\{f=(f_n):\|f\|_{{}_p\mathscr{L}_r(X)}=\inf_{r\in R}\Big(E\sum_{n=1}^{\infty}r_{n-1}^{1-p/r}\|df_n\|^p\Big)^{1/p}<\infty\}$$

$${}_pL_r(X)=\{f=(f_n):\|f\|_{{}_pL_r(X)}=\inf_{r\in R}\Big(E\sum_{n=1}^{\infty}r_{n}^{1-p/r}\|df_n\|^p\Big)^{1/p}<\infty\}$$

其中 R 的定义见前文.

当 $0<p\leqslant r<\infty$ 时，刘培德[52]证明了 $_p\mathscr{L}_r(X)\sim{}_pH^\sigma_r(X)$，$_pL_r(X)\sim{}_pH^S_r(X)$. 下面证明当 $0<r\leqslant p<\infty$ 时，这种等价关系仍然成立，即

引理 5.3.1 假设 $0<r\leqslant p<\infty$，则

(i) $_pH^\sigma_r(X)\sim{}_p\mathscr{L}_r(X)$，且每个鞅 $f=(f_n)(f_0=0)$ 成立

$$\Big(\frac{r}{p}\Big)^{1/p}\|f\|_{{}_p\mathscr{L}(X)}\leqslant\|f\|_{{}_pH^\sigma_r(X)}\leqslant\|f\|_{{}_p\mathscr{L}(X)}$$

(ii) $_pH^S_r(X)\sim{}_pL_r(X)$，且每个鞅 $f=(f_n)(f_0=0)$ 成立

$$\Big(\frac{r}{p}\Big)^{1/p}\|f\|_{{}_pL_r(X)}\leqslant\|f\|_{{}_pH^S_r(X)}\leqslant\|f\|_{{}_pL_r(X)}$$

证明 这里证明 (i)，(ii)类似可证. 设 $f=(f_n)_{n\geqslant0}\in{}_pH_r(X)$，不失一般性，假设 $\|\sigma^{(p)}(f)\|_r=1$ 并且当 $(\sigma^{(p)}_{n+1}(f)^r)_{n\geqslant0}\in R$ 时，得

$$\begin{aligned}\|f\|_{{}_p\mathscr{L}_r(X)}&\leqslant\Big(E\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n^{(p)}(f)^{r(1-\frac{p}{r})}\|df_n\|^p\Big)^{1/p}\\&=\Big(E\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n^{(p)}(f)^{r-p}(\sigma_n^{(p)}(f)^p-\sigma_{n-1}^{(p)}(f)^p)\Big)^{1/p}\end{aligned}\tag{5.3.1}$$

运用基本不等式

$$\lambda(\rho-1)\rho^{\lambda-1}\leqslant\rho^\lambda-1\qquad(\rho\geqslant0,\ 0<\lambda\leqslant1)$$

令 $\rho=\Big(\frac{B}{A}\Big)^p$，$B^p\geqslant A^p$ 及 $\lambda=\frac{r}{p}$，$0<p<\infty$，则

$$B^r-A^r\geqslant\frac{r}{p}(B^p-A^p)B^{r-p}\qquad(0<r\leqslant p)\tag{5.3.2}$$

取 $B=\sigma_n^{(p)}(f)$ 及 $A=\sigma_{n-1}^{(p)}(f)$，由(5.3.2)式，得

$$\begin{aligned}&\sigma_n^{(p)}(f)^{r-p}(\sigma_n^{(p)}(f)^p-\sigma_{n-1}^{(p)}(f)^p)\\&\leqslant\frac{p}{r}\Big(\sigma_n^{(p)}(f)^r-\sigma_{n-1}^{(p)}(f)^r\Big)\end{aligned}\tag{5.3.3}$$

据(5.3.1)式和(5.3.3)式，得

$$\begin{aligned}\|f\|_{{}_p\mathscr{L}_r(X)}&\leqslant\Big(\frac{p}{r}\Big)^{1/p}\Big(E\sum_{n=1}^{\infty}(\sigma_n^{(p)}(f)^r-\sigma_{n-1}^{(p)}(f)^r)\Big)^{1/p}\\&\leqslant\Big(\frac{p}{r}\Big)^{1/p}\Big(E\big(\sigma^{(p)}(f)^r\big)\Big)^{1/p}=\Big(\frac{p}{r}\Big)^{1/p}\end{aligned}$$

即

$$\Big(\frac{r}{p}\Big)^{1/p}\|f\|_{{}_p\mathscr{L}_r(X)}\leqslant\|f\|_{{}_pH^\sigma_r(X)}\tag{5.3.4}$$

另一方面，设 $f=(f_n)_{n\geqslant0}\in{}_p\mathscr{L}_r(X)$，既然 $1-\frac{p}{r}\leqslant0$，显然对于任意的 $r=(r_n)_{n\geqslant0}\in R$，则 $r_{n-1}^{1-p/r}$ 单调递减收敛于 $r_\infty^{1-p/r}$，从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_{n-1}^{1-p/r}\left(\sigma_n^{(p)}(f)^p-\sigma_{n-1}^{(p)}(f)^p\right)\geqslant r_\infty^{1-p/r}\sigma^{(p)}(f)^r$$

由 Hölder 不等式，得

$$\begin{aligned}\|\sigma^{(p)}(f)\|_r^r &= E(\sigma^{(p)}(f)^r r_\infty^{(r-p)/p} r_\infty^{(p-r)/p})\\ &\leqslant (E(\sigma_n^{(p)}(f) r_\infty^{(r-p)/p})^{p/r})^{r/p}(E(r_\infty^{(p-r)/p})^{p/(p-r)})^{(p-r)/p}\\ &\leqslant (E(r_\infty^{1-p/r}\sigma^{(p)}(f)^p))^{r/p}\\ &\leqslant \|f\|^r_{{}_p\mathscr{L}_r(X)}\end{aligned}$$

即

$$\|f\|_{{}_pH_r^\sigma(X)}\leqslant\|f\|_{{}_p\mathscr{L}_r(X)}$$

命题得证. □

定理 **5.3.2** 设 $2\leqslant q<\infty$，$0<r\leqslant 1$，X 同构于 q 一致凸空间，则

(i) ${}_p\mathscr{L}_{r'}(X^*)\subset {}_q\mathscr{L}_r(X)^*$；

(ii) ${}_pL_{r'}(X^*)\subset {}_qL_r(X)^*$，其中 $p=\dfrac{q}{q-1}$，$r'=\dfrac{r}{r-1}$.

证明 这里仅证(i)，类似可证(ii). 由于 X 同构于 q 一致凸空间，于是，$\forall f=(f_n)\in L_q(X)$

$$\begin{aligned}\|f\|_q&\geqslant CE(\sum_{n=1}^{\infty}\|df_n\|^q)^{1/q}\\ &\geqslant\inf_{(r_n)\in R}\left\{\left(E\sum_{n=1}^{\infty}r_{n-1}^{1-q/r}\|df_n\|^q\right)^{1/q}\right\}\\ &=\|f\|_{{}_q\mathscr{L}_r(X)}\end{aligned}$$

于是 $L_q(X)\subset {}_q\mathscr{L}_r(X)$. 根据 X^* 的 p 一致光滑性，$\forall\varphi\in{}_p\mathscr{L}_{r'}(X^*)$

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_p&\leqslant CE\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|d\varphi_n\|^p\right)^{1/p}\\ &\leqslant\sup_{(r_n)\in R}\left\{\left(E\sum_{n=1}^{\infty}r_{n-1}^{1-p/r'}\|d\varphi_n\|^p\right)^{1/p}\right\}\\ &=\|\varphi\|_{{}_p\mathscr{L}_{r'}(X^*)}\end{aligned}$$

于是 ${}_p\mathscr{L}_{r'}(X^*)\subset L_p(X^*)$. 从而 $E(\sum df_n d\varphi_n)$ 有意义，并且

$$\begin{aligned}\left|E(\sum df_n d\varphi_n)\right|&\leqslant E(\sum_{n=1}^{\infty}\|df_n\|\|d\varphi_n\|)\\ &\leqslant\left(E\sum_{n=1}^{\infty}r_{n-1}^{1-q/r}\|df_n\|^q\right)^{1/q}\left(E\sum_{n=1}^{\infty}r_{n-1}^{1-p/r'}\|d\varphi_n\|^p\right)^{1/p}\end{aligned}$$

对任给 $\varepsilon>0$，选 $(r_n)\in R$，使得 $\left(E\sum_{n=1}^{\infty}r_{n-1}^{1-q/r}\|df_n\|^q\right)^{1/q}\leqslant\|f\|_{{}_q\mathscr{L}_r(X)}+\varepsilon$，然后令 $\varepsilon\to 0$，即得

$$\left|E(\sum_{n=1}^{\infty}df_n d\varphi_n)\right|\geqslant\|f\|_{{}_q\mathscr{L}_r(X)}\|\varphi\|_{{}_p\mathscr{L}_{r'}(X^*)}\qquad(5.3.5)$$

根据 Hahn－Banach 定理及(5.3.5)式知，${}_p\mathscr{L}_{r'}(X^*)\subset{}_q\mathscr{L}_r(X)^*$. □

利用引理 5.3.1，则得定理 5.3.2 的如下推论.

推论 **5.3.1** 设 $2\leqslant q<\infty$，$0<r\leqslant 1$，X 同构于 q 一致凸空间，则

(i) ${}_q\mathscr{L}_{r'}(X^*)\subset{}_qH_r^\sigma(X)^*$；

(ii) ${}_pL_{r'}(X^*)\subset{}_qH_r^S(X)^*\subset{}_qQ_r(X)^*$. 其中 $p=\dfrac{q}{q-1}$，$r'=\dfrac{r}{r-1}$.

第六章　鞅 Hardy 空间的共轭($1\leqslant r<\infty$)

著名的 BMO(Bounded Mean Oscillation) 空间最初是由 John-Nirenberg 于 1961 年引入的. Fefferman 不等式由 Fefferman 和 Stein[42] 于 1972 年引入并以此为工具建立了函数空间的 H_1 —BMO 对偶理论. 基于 Herz[46] 的工作,1973 年 Garsia[44] 将之推广到了实值鞅. 最近,刘培德[54] 又进一步将其推广到 Banach 空间值鞅的情况,他证明了:

(1) 当 $1<p\leqslant 2$,$1\leqslant r\leqslant p$ 时,${}_qK_{r'}(X^*)$ 连续嵌入 ${}_pH_r^S(X)$ 的共轭空间,当且仅当 X 同构于 p 一致光滑空间;

(2) 当 $2\leqslant q<\infty$,$1\leqslant r\leqslant q$ 时,${}_qH_r^S(X)$ 的共轭空间连续嵌入 ${}_pK_{r'}(X^*)$,当且仅当 X 同构于 q 一致凸空间.

这里 p 和 q,r 和 r' 互为共轭数.

一个自然的问题是:当 X 为一般的 Banach 空间时,${}_pH_r^S(X)$ 的共轭空间究竟是什么呢?本章首先引入两类新型 B 值鞅空间 ${}_pK_r^S(X)$ 和 ${}_pK_r^\sigma(X)$,并且分别讨论 ${}_pK_r^S(X)$ 和 ${}_pK_r(X)$,${}_pK_r^\sigma(X)$ 和 ${}_pK_r^+(X)$ 的相互嵌入关系,它们与 Banach 空间的 p 一致光滑性和 q 一致凸性有着密切的联系. 其次,同样引入并讨论了两类新型 B 值鞅的 BMO 空间 ${}_pBMO_r^S(X)$ 和 ${}_pBMO_r^\sigma(X)$. 最后,对 Fefferman 对偶定理作了推广,证明了当 X 为自反 Banach 空间,$1\leqslant r\leqslant p<\infty$ 时,${}_qK_{r'}^S(X^*)$ 和 ${}_qK_{r'}^\sigma(X^*)$ 正好分别是 ${}_pH_r^S(X)$ 与 ${}_pH_r^\sigma(X)$ 的共轭.

§6.1　${}_pK_r^S(X)$ 和 ${}_pK_r(X)$,${}_pK_r^\sigma(X)$ 和 ${}_pK_r^+(X)$

对于实值鞅,空间 ${}_2K_r$ 和 ${}_2K_r^+$ 是由 Garsia[44] 于 1973 年最早引入的,而对于 B 值鞅,空间 ${}_pK_r(X)$ 和 ${}_pK_r^+(X)$ 则是由刘培德[54] 于 1990 年所引入. 其定义分别如下:

$$
{}_pK_r(X)=\left\{\begin{array}{l} f=(f_n)_{n\geqslant 0}:\ \exists\,\gamma\in L_r(R),\ \gamma\geqslant 0,\text{使得}\\ E(\|f_m-f_{n-1}\|^p\mid\mathscr{F}_n)\leqslant E(\gamma^p\mid\mathscr{F}_n),\\ \forall\,1\leqslant n\leqslant m<\infty \end{array}\right\}
$$

$$
(0<p\leqslant r\leqslant\infty,\ p\neq\infty),\quad \|f\|_{{}_pK_r(X)}=\inf_\gamma\|\gamma\|_r
$$

$$
{}_pK_r^+(X)=\left\{\begin{array}{l} f=(f_n)_{n\geqslant 0}:\ \exists\,\gamma\in L_r(R),\ \gamma\geqslant 0,\text{使得}\\ E(\|f_m-f_n\|^p\mid\mathscr{F}_n)\leqslant E(\gamma^p\mid\mathscr{F}_n),\\ \forall\,0\leqslant n\leqslant m<\infty \end{array}\right\}
$$

$$
(0<p\leqslant r\leqslant\infty,\ p\neq\infty),\qquad \|f\|_{{}_pK_r^+(X)}=\inf_\gamma\|\gamma\|_r
$$

为了进一步刻画 ${}_pH_r^S(X)$ 和 ${}_pH_r^\sigma(X)$ 的共轭空间,对 B 值鞅引入两类新空间 ${}_pK_r^S(X)$ 和 ${}_pK_r^\sigma(X)$,分别可视为 ${}_pK_r(X)$ 和 ${}_pK_r^+(X)$ 推广.

$$
{}_pK_r^S(X)=\left\{\begin{array}{l} f=(f_n)_{n\geqslant 0}:\ \exists\,\gamma\in L_r(R),\ \gamma\geqslant 0,\text{使得}\\ E(S^{(p)}(f)^p-S_{n-1}^{(p)}(f)^p\mid\mathscr{F}_n)\leqslant E(\gamma^p\mid\mathscr{F}_n),\\ \forall\ \ n\geqslant 1 \end{array}\right\}
$$

$$
(0<p\leqslant r\leqslant\infty,\ p\neq\infty),\qquad \|f\|_{{}_pK_r^S(X)}=\inf_\gamma\|\gamma\|_r
$$

$$
{}_pK_r^\sigma(X)=\left\{\begin{array}{l} f=(f_n)_{n\geqslant 0}:\ \exists\,\gamma\in L_r(R),\ \gamma\geqslant 0,\text{使得}\\ E(\sigma^{(p)}(f)^p-\sigma_n^{(p)}(f)^p\mid\mathscr{F}_n)\leqslant E(\gamma^p\mid\mathscr{F}_n),\\ \forall\ \ n\geqslant 1 \end{array}\right\}
$$

$$
(0<p\leqslant r\leqslant\infty,\ p\neq\infty),\qquad \|f\|_{{}_pK_r^\sigma(X)}=\inf_\gamma\|\gamma\|_r
$$

现在讨论 ${}_pK_r^S(X)$ 和 ${}_pK_r(X)$,${}_pK_r^\sigma(X)$ 和 ${}_pK_r^+(X)$ 的相互嵌入关系,它们与 Banach 空间的 p 一致光滑性和 q 一致凸性有着

密切联系.

定理 6.1.1 假设 $1<p\leqslant 2$, $p\leqslant r\leqslant\infty$, 则以下条件等价:

(i) X 是 p 一致可光滑空间;

(ii) ${}_pK_r^S(X)\subset {}_pK_r(X)$, 并且存在 $C=C_{p,r}>0$, 使得对于每个鞅 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}\in {}_pK_r^S(X)$ 成立

$$\|f\|_{{}_pK_r(X)}\leqslant C\|f\|_{{}_pK_r^S(X)} \tag{6.1.1}$$

(iii) ${}_pK_r^\sigma(X)\subset {}_pK_r^+(X)$, 并且存在 $C=C_{p,r}>0$, 使得对于每个鞅 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}\in {}_pK_r^\sigma(X)$ 成立

$$\|f\|_{{}_pK_r^+(X)}\leqslant C\|f\|_{{}_pK_r^\sigma(X)} \tag{6.1.2}$$

证明 (i)$\Rightarrow$(ii) 设 X 是 p 一致可光滑空间, $f=(f_n)_{n\geqslant 0}\in {}_pK_r^S(X)$. 于是, 存在 $\gamma\in L_r(R)$, $\gamma\geqslant 0$, 使得

$$E\Big(\sum_{i=n}^{\infty}\|df_i\|^p\mid\mathscr{F}_n\Big)=E(S^{(p)}(f)^p-S_{n-1}^{(p)}(f)^p\mid\mathscr{F}_n)$$
$$\leqslant E(\gamma^p\mid\mathscr{F}_n),\qquad\forall\ n\geqslant 1$$

据 X 的 p 一致光滑性, 由定理 2.4.12 得

$$E(\|f_m-f_{n-1}\|^p\mid\mathscr{F}_n)$$
$$\leqslant CE\Big(\sum_{i=n}^{m}\|df_i\|^p\mid\mathscr{F}_n\Big)$$
$$\leqslant CE(\gamma^p\mid\mathscr{F}_n),\qquad\forall\ 1\leqslant n\leqslant m<\infty$$

故 $\|f\|_{{}_pK_r(X)}\leqslant C\|f\|_{{}_pK_r^S(X)}$, (6.1.1)式得证.

(i)$\Rightarrow$(iii) 证明类似于(i)$\Rightarrow$(ii), 此处从略.

(ii)$\Rightarrow$(i) 假定(6.1.1)式成立, 设 Walsh-Paley 鞅 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$ 满足 $\sum_{n=1}^{\infty}\|df_n\|^p\in L_\infty$. 则 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}\in {}_pK_\infty^S(X)\subset {}_pK_r^S(X)\subset {}_pK_r(X)$. 由 ${}_pK_r(X)$ 的定义知, 对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\gamma\geqslant 0$, $\gamma\in L_r$, 使得

$$E(\|f_m-f_{n-1}\|^p\mid\mathscr{F}_n)\leqslant E(\gamma^p\mid\mathscr{F}_n)$$
$$\forall\ 1\leqslant n\leqslant m<\infty,\qquad \|\gamma\|_r\leqslant\|f\|_{{}_pK_r(X)}+\varepsilon$$

取期望并由(6.1.1)式得

$$E\|f_m-f_{n-1}\|^p\leqslant E(\gamma^p)\leqslant(C\|f\|_{{}_pK_r^S(X)}+\varepsilon)^p \tag{6.1.3}$$

注意 $\sum_{n=1}^{\infty}\|df_n\|^p\in L_\infty$, 故

$$E(S^{(p)}(f)^p-S_{n-1}^{(p)}(f)^p\mid\mathscr{F}_n)\leqslant E\Big(\sum_{i=n}^{\infty}\|df_i\|^p\mid\mathscr{F}_n\Big) \tag{6.1.4}$$

由(6.1.3)式和(6.1.4)式得

$$E\|f_m-f_{n-1}\|^p\leqslant\Big(C\Big\|\Big(\sum_{i=n}^{\infty}\|df_i\|^p\Big)^{1/p}\Big\|_r+\varepsilon\Big)$$

当 $n\to\infty$ 时, 右端趋于零. Fatou 引理说明 f_n 在 $L_p(X)$ 中收敛, 从而 f_n 依概率收敛. 由定理 2.6.2 知, X 是 p 一致可光滑空间.

(iii)$\Rightarrow$(i) 证明类似于(ii)$\Rightarrow$(i), 此处从略. □

定理 6.1.2 假设 $2\leqslant q<\infty$, $q\leqslant r\leqslant\infty$, 则以下条件等价:

(i) X 是 q 一致可凸空间;

(ii) ${}_qK_r(X)\subset {}_qK_r^S(X)$, 并且存在 $C=C_{q,r}>0$, 使得对于每个鞅 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}\in {}_qK_r(X)$ 成立

$$\|f\|_{{}_qK_r^S(X)}\leqslant C\|f\|_{{}_qK_r(X)} \tag{6.1.5}$$

(iii) ${}_qK_r^+(X)\subset {}_qK_r^\sigma(X)$, 并且存在 $C=C_{q,r}>0$, 使得对于每个鞅 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}\in {}_qK_r^+(X)$ 成立

$$\|f\|_{{}_qK_r^\sigma(X)}\leqslant C\|f\|_{{}_qK_r^+(X)} \tag{6.1.6}$$

证明 (i)$\Rightarrow$(ii) 设 X 是 q 一致可凸空间, $f=(f_n)_{n\geqslant 0}\in {}_qK_r(X)$. 则存在 $\gamma\in L_r(R)$, $\gamma\geqslant 0$, 使得

$$E(\|f_m-f_{n-1}\|^p\mid\mathscr{F}_n)\leqslant E(\gamma^p\mid\mathscr{F}_n),$$
$$\forall\ 1\leqslant n\leqslant m<\infty$$

据 X 的 q 一致凸性, 由定理 2.4.11 得

$$E\Big(\sum_{i=n}^{m}\|df_i\|^p\mid\mathscr{F}_n\Big)\leqslant CE(\|f_m-f_{n-1}\|^p\mid\mathscr{F}_n)$$
$$\leqslant CE(\gamma^p\mid\mathscr{F}_n),\qquad\forall\ 0\leqslant n\leqslant m<\infty$$

由 m 的任意性得

$$E(S^{(p)}(f)^p - S_{n-1}^{(p)}(f)^p \mid \mathscr{F}_n) \leqslant CE(\gamma^p \mid \mathscr{F}_n), \qquad \forall\ n \geqslant 1$$

故 $\| f \|_{{}_qK_r^S(X)} \leqslant C \| f \|_{{}_qK_r(X)}$，从而(ii)得证.

(i)⇒(iii)　证明类似于(i)⇒(ii)，此处从略.

(ii)⇒(i)　假定(6.1.5)式成立，设 $f = (f_n)_{n\geqslant 0}$ 为一致有界鞅. 则 $f = (f_n)_{n\geqslant 0} \in {}_qK_r(X)$. 并且

$$E(\| f_m - f_{n-1} \|^p \mid \mathscr{F}_n) \leqslant 2E((f^*)^p \mid \mathscr{F}_n), \quad \forall\ 1 \leqslant n \leqslant m < \infty$$

由 ${}_qK_r^S(X)$ 的定义知，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\gamma \geqslant 0$，$\gamma \in L_r$，使得

$$E(S^{(q)}(f)^q - S_{n-1}^{(q)}(f)^q \mid \mathscr{F}_n) \leqslant E(\gamma^q \mid \mathscr{F}_n)$$

$$\| \gamma \|_r \leqslant \| f \|_{{}_qK_r^S(X)} + \varepsilon$$

当 $n = 0$ 时，取期望则得

$$E(S^{(q)}(f)^q) \leqslant E(\gamma^q) \leqslant (C \| f \|_{{}_qK_r^S(X)} + \varepsilon)^q < \infty$$

于是 $S^{(q)}(f) < \infty$ $a.e.$，故 X 是 q 一致可凸空间.

(iii)⇒(i)　证明类似于(ii)⇒(i)，此处从略. □

运用 Kwapin 定理，并由定理 6.1.1 和 6.1.2，得如下推论：

推论 6.1.1　设 $2 \leqslant r \leqslant \infty$，$X$ 是 Banach 空间，则以下条件相互等价：

(i) X 同构于 Hilbert 空间；

(ii) ${}_2K_r(X) \sim {}_2K_r^S(X)$，且存在常数 $C_r > 0$，及 $C'_r > 0$，使得对于每一个鞅 $f = (f_n)_{n\geqslant 0}$ 成立

$$C_r \| f \|_{{}_2K_r(X)} \leqslant \| f \|_{{}_2K_r^S(X)} \leqslant C'_r \| f \|_{{}_2K_r(X)}$$

(iii) ${}_2K_r^+(X) \sim {}_2K_r^\sigma(X)$，且存在常数 $C_r > 0$，及 $C'_r > 0$，使得对于每一个鞅 $f = (f_n)_{n\geqslant 0}$ 成立

$$C_r \| f \|_{{}_qK_r^+(X)} \leqslant \| f \|_{{}_qK_r^\sigma(X)} \leqslant C'_r \| f \|_{{}_qK_r^+(X)}$$

§6.2　${}_pBMO_r^S(X)$ 和 $BMO_r(X)$，${}_pBMO_r^\sigma(X)$ 和 $BMO_r^+(X)$

作为上一节内容的发展，本节将引入两类新型 BMO 空间. 其中，对于实值鞅，空间 ${}_2BMO_1^\sigma$ 最早由 Garsia[44] 引入；而 ${}_2BMO_r^S$ 是由 Weisz[79] 引入的.

对于 B 值鞅，若 $0 < p < \infty$ 且 $0 < r < \infty$，定义鞅空间如下：

$$BMO_r(X) = \left\{ \begin{array}{l} f = (f_n)_{n\geqslant 0}: \\ \sup\limits_n \| (E_n \| f - f_{n-1} \|^r)^{1/r} \|_\infty < \infty \end{array} \right\}$$

$$\| f \|_{BMO_r} = \sup_n \| (E_n \| f - f_{n-1} \|^r)^{1/r} \|_\infty$$

$$BMO_r^+(X) = \left\{ \begin{array}{l} f = (f_n)_{n\geqslant 0}: \\ \sup\limits_n \| (E_n \| f - f_n \|^r)^{1/r} \|_\infty < \infty \end{array} \right\}$$

$$\| f \|_{BMO_r^+} = \sup_n \| (E_n \| f - f_n \|^r)^{1/r} \|_\infty$$

$${}_pBMO_r^S(X) = \left\{ \begin{array}{l} f = (f_n)_{n\geqslant 0}: \\ \sup\limits_n \| (E_n(S^{(p)}(f)^p - S_{n-1}^{(p)}(f)^p)^{r/p})^{1/r} \|_\infty < \infty \end{array} \right\}$$

$$\| f \|_{BMO_r^{S(p)}} = \sup_n \| (E_n(S^{(p)}(f)^p - S_{n-1}^{(p)}(f)^p)^{r/p})^{1/r} \|_\infty$$

$${}_pBMO_r^\sigma(X) = \left\{ \begin{array}{l} f = (f_n)_{n\geqslant 0}: \\ \sup\limits_n \| (E_n(\sigma^{(p)}(f)^p - \sigma_n^{(p)}(f)^p)^{r/p})^{1/r} \|_\infty < \infty \end{array} \right\}$$

$$\| f \|_{BMO_r^{\sigma(p)}} = \sup_n \| (E_n(\sigma^{(p)}(f)^p - \sigma_n^{(p)}(f)^p)^{r/p})^{1/r} \|_\infty$$

注*：容易证明

$${}_pK_\infty(X) = BMO_p(X) \tag{6.2.1}$$

$${}_pK_\infty^+(X) = BMO_p^+(X) \tag{6.2.2}$$

$${}_pK_\infty^S(X) = {}_pBMO_p^S(X) \tag{6.2.3}$$

$${}_pK_\infty^\sigma(X) = {}_pBMO_p^\sigma(X) \tag{6.2.4}$$

对于实值鞅，Weisz[79] 证明了当 $0 < r < \infty$ 时，${}_2BMO_r^\sigma$ 和

BMO_2^+，${}_2BMO_r^S$ 和 BMO_2 是相互等价的. 但是，对于 B 值鞅，这种等价关系并不保持. 实际上，由 (6.2.1)式及(6.2.4)式，根据定理 6.1.1 和 6.1.2 有如下推论：

推论 6.2.1 设 $1 < p \leqslant 2$ 且 X 是 Banach 空间，则以下条件等价：

(i) X 是 p 一致可光滑空间；

(ii) ${}_pBMO_p^S(X) \subset BMO_p(X)$，并且存在常数 $C = C_p > 0$，使得对于每个鞅 $f = (f_n)_{n \geqslant 0} \in {}_pBMO_p^S(X)$ 成立

$$\| f \|_{BMO_p(X)} \leqslant C \| f \|_{{}_pBMO_p^S(X)}$$

(iii) ${}_pBMO_p^\sigma(X) \subset BMO_p^+(X)$，并且存在常数 $C = C_p > 0$，使得对于每个鞅 $f = (f_n)_{n \geqslant 0} \in {}_pBMO_p^\sigma(X)$ 成立

$$\| f \|_{BMO_p^+(X)} \leqslant C \| f \|_{{}_pBMO_p^\sigma(X)}$$

推论 6.2.2 设 $2 \leqslant q < \infty$ 且 X 是 Banach 空间，则以下条件等价：

(i) X 是 q 一致可凸空间；

(ii) $BMO_q(X) \subset {}_qBMO_q^S(X)$，并且存在常数 $C = C_q > 0$，使得对于每个鞅 $f = (f_n)_{n \geqslant 0} \in BMO_q(X)$ 成立

$$\| f \|_{{}_qBMO_q^S(X)} \leqslant C \| f \|_{BMO_q(X)}$$

(iii) $BMO_q^+(X) \subset {}_qBMO_q^\sigma(X)$，并且存在常数 $C = C_q > 0$，使得对于每个鞅 $f = (f_n)_{n \geqslant 0} \in BMO_q^+(X)$ 成立

$$\| f \|_{{}_qBMO_q^\sigma(X)} \leqslant C \| f \|_{BMO_q^+(X)}$$

利用推论 6.2.1 和 6.2.2，据 Kwapien 定理，得以下推论.

推论 6.2.3 设 X 是 Banach 空间，则以下条件等价：

(i) X 同构于 Hilbert 空间；

(ii) $BMO_2(X) \sim {}_2BMO_2^S(X)$，并且存在常数 $C > 0$，使得对于每个 X-值鞅 $f = (f_n)_{n \geqslant 0}$ 成立

$$C^{-1} \| f \|_{BMO_2(X)} \leqslant \| f \|_{{}_2BMO_2^S(X)} \leqslant C \| f \|_{BMO_2(X)}$$

(iii) $BMO_2^+(X) \sim {}_2BMO_2^\sigma(X)$，并且存在常数 $C > 0$，使得对于每个 X-值鞅 $f = (f_n)_{n \geqslant 0}$ 成立

$$C^{-1} \| f \|_{BMO_2^+(X)} \leqslant \| f \|_{{}_2BMO_2^\sigma(X)} \leqslant C \| f \|_{BMO_2^+(X)}$$

§6.3 Fefferman 不等式的推广及 ${}_pH_r^S(X)$ 和 ${}_pH_r^\sigma(X)$ 的共轭

本节将首先给出 Fefferman 不等式的一种推广，然后证明 ${}_pH_r^S(X)^* = {}_qK_{r'}^S(X^*)$ 和 ${}_pH_r^\sigma(X)^* = {}_qK_{r'}^\sigma(X^*)$. 作为推论，我们推广了 Fefferman 的 H_1-BMO 对偶定理. 具体地说，证明了

$${}_pH_1^S(X)^* = {}_qBMO_q^S(X^*) \text{ 和 } {}_pH_1^\sigma(X)^* = {}_qBMO_q^\sigma(X^*)$$

定理 6.3.1 设 X 是 Banach 空间，$1 < p < \infty$，$1 \leqslant r \leqslant p$，记 q，r' 分别为 p 和 r 的共轭数，则存在 $C = C_{p,r} > 0$，使得

(i) 对于任意 $f \in {}_pH_r^S(X)$，$\varphi \in {}_qK_{r'}^S(X^*)$，有

$$| Ef_n\varphi_n | \leqslant C \| f \|_{{}_pH_r^S(X)} \| \varphi \|_{{}_qK_{r'}^S(X^*)}, \qquad n \geqslant 1 \tag{6.3.1}$$

(ii) 对于任意 $f \in {}_pH_r^\sigma(X)$，$\varphi \in {}_qK_{r'}^\sigma(X^*)$，有

$$| Ef_n\varphi_n | \leqslant C \| f \|_{{}_pH_r^\sigma(X)} \| \varphi \|_{{}_qK_{r'}^\sigma(X^*)}, \qquad n \geqslant 1 \tag{6.3.2}$$

证明　当 $f \in {}_pH_r^S(X)$ 时，$df_i \in L_r(X)$，从而 $f_n = \sum_{i=1}^n df_i \in L_r(X)$. 当 $\varphi \in {}_qK_{r'}^S(X^*)$ 时，由 ${}_qK_{r'}^S(X^*)$ 的定义知

$$\begin{aligned} \| d\varphi_n \| &= (E(S_n^{(q)}(\varphi)^q - S_{n-1}^{(q)}(\varphi)^q \mid \mathscr{F}_n))^{1/q} \\ &\leqslant (E(\gamma^q \mid \mathscr{F}_n))^{1/q} \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \| d\varphi_n \|_{r'} &\leqslant \| (E(\gamma^q \mid \mathscr{F}_n))^{1/q} \|_{r'} \\ &\leqslant \| \gamma \|_{r'} < \infty \end{aligned}$$

从而 $\varphi_n \in L_{r'}(X^*)$. 这说明积分 $Ef_n\varphi_n$ 有意义. 对任意 $n \geqslant 1$ 有

$$Ef_n\varphi_n = \sum_{i=1}^{n} Edf_i d\varphi_i \tag{6.3.3}$$

从而

$$\begin{aligned}|Ef_n\varphi_n| &\leqslant \sum_{i=1}^{n} |Edf_i S_i^{(p)}(f)^{r/p-1} d\varphi_i S_i^{(p)}(f)^{1-r/p}| \\ &\leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} E\|df_i\|^p S_i^{(p)}(f)^{r-p}\Big)^{1/p} \Big(\sum_{i=1}^{n} E\|d\varphi_i\|^q S_i^{(q)}(f)^{q(1-r/p)}\Big)^{1/q} \\ &\triangleq AB\end{aligned}$$

对于 A, 利用不等式 $\rho^\beta - 1 \geqslant \beta(\rho-1)\rho^{\beta-1}$, $(\beta \leqslant 1 \leqslant \rho)$, 取 $\beta = r/p$, $\rho = S_i^{(p)}(f)^p S_{i-1}^{(p)}(f)^{-p}$, 则得到

$$S_i^{(p)}(f)^r - S_{i-1}^{(p)}(f)^r \geqslant \frac{r}{p}(S_i^{(p)}(f)^p - S_{i-1}^{(p)}(f)^p) S_{i-1}^{(p)}(f)^{r-p}$$

由此得出

$$\begin{aligned}A^p &= \sum_{i=1}^{n} E\|df_i\|^p S_i^{(p)}(f)^{r-p} \\ &= E\sum_{i=1}^{n}\Big(S_i^{(p)}(f)^p - S_{i-1}^{(p)}(f)^p\Big) S_{i-1}^{(p)}(f)^{r-p} \\ &\leqslant \frac{p}{r} ES_n^{(p)}(f)^r\end{aligned} \tag{6.3.4}$$

对于 B, 可归纳地定义

$$\begin{aligned}S_i^{(p)}(f)^{q(1-r/p)} &= \Big(\sum_{j=1}^{i} \|df_j\|^p\Big)^{\frac{q}{p}(r/p-1)} \\ &= \sum_{j=1}^{i} Q_j, \qquad (0 \leqslant i \leqslant n)\end{aligned}$$

使得 Q_j 关于 $\mathscr{F}_j$ 可测, 于是

$$\begin{aligned}B^q &= \sum_{i=1}^{n} E\|d\varphi_i\|^q S_i^{(p)}(f)^{q(1-r/p)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} E\|d\varphi_i\|^q \sum_{j=1}^{i} Q_j \\ &= E\Big(\sum_{j=1}^{n} Q_j \sum_{i=j}^{n} E(\|d\varphi_i\|^q \mid \mathscr{F}_j)\Big) \\ &= E\Big(\sum_{j=1}^{n} Q_j E\Big(S_n^{(q)}(f)^q - S_{j-1}^{(q)}(f)^q \mid \mathscr{F}_j\Big)\Big) \\ &\leqslant E\Big(\sum_{j=1}^{n} Q_j E\Big(S^{(q)}(f)^q - S_{j-1}^{(q)}(f)^q \mid \mathscr{F}_j\Big)\Big) \\ &\leqslant E\Big(\Big(\sum_{j=1}^{n} Q_j\Big)\gamma^q\Big) \\ &= ES_n^{(p)}(f)^{q(1-r/p)}\gamma^q\end{aligned}$$

注意到 $q\Big(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{p}\Big) + \dfrac{q}{r'} = 1$, 由 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned}B &\leqslant (E(S_n^{(p)}(f)^r)^{q(1/r-1/p)}(\gamma^{r'})^{q/r'})^{1/q} \\ &\leqslant (ES_n^{(p)}(f)^r)^{(1/r-1/p)}(E\gamma^{r'})^{1/r'}\end{aligned} \tag{6.3.5}$$

由(6.3.3)式、(6.3.4)式、(6.3.5)式得

$$\begin{aligned}|Ef_n\varphi_n| &\leqslant \Big(\frac{p}{r}\Big)^{1/p}(ES_n^{(p)}(f)^r)^{(1/r)}(E\gamma^{r'})^{1/r'} \\ &= C\|S_n^{(p)}(f)\|_r \|\gamma\|_{r'}\end{aligned}$$

由 $\|f\|_{{}_pH_r^S(X)}$ 及 $\|\varphi\|_{{}_qK_r^S(X^*)}$ 的定义知此即

$$|Ef_n\varphi_n| \leqslant C\|f\|_{{}_pH_r^S(X)}\|\varphi\|_{{}_qK_r^S(X^*)}$$

故(6.3.1)式得证.

(ii) 证明类似于(i), 此处从略. □

注*:由定理 6.3.1 知, 若 $1 \leqslant r \leqslant p$, 则每一个 $\varphi \in {}_qK_r^S(X^*)$ 或 $\psi \in {}_qK_r^\sigma(X^*)$ 可分别被视为一个 ${}_pH_r^S(X)$ 上的有界线性范函 l_φ 或者 ${}_pH_r^\sigma(X)$ 上的有界线性范函 l_ψ, 且满足

$$l_\varphi(f) = \langle f, \varphi\rangle = \lim_{n\to\infty} E(f_n\varphi_n), \qquad \forall\ f \in {}_pH_r^S(X)$$

和

$$|l_\varphi(f)| \leqslant C\|f\|_{{}_pH_r^S(X)}\|\varphi\|_{{}_qK_r^S(X^*)}$$

或者

$$l_\psi(f) = \langle f, \psi\rangle = \lim_{n\to\infty} E(f_n\psi_n), \qquad \forall\ f \in {}_pH_r^\sigma(X)$$

和

$$| l_{\psi}(f) | \leqslant C \| f \|_{{}_pH_r^{\sigma}(X)} \| \psi \|_{{}_qK_{r'}^{\sigma}(X^*)}$$

其中

$$\lim_{n\to\infty} E(f_n\varphi_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} E(df_i d\varphi_i)$$

且

$$\lim_{n\to\infty} E(f_n\psi_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} E(df_i d\psi_i)$$

反过来，往证 ${}_pH_r^S(X)^*$ 或 ${}_pH_r^{\sigma}(X)^*$ 中的每一个元素都能由某个 $\varphi \in {}_qK_{r'}^S(X^*)$ 或 $\psi \in {}_qK_{r'}^{\sigma}(X^*)$ 通过上式给出. 为此需首先将 ${}_pH_r^S(X)$ 或 ${}_pH_r^{\sigma}(X)$ 分别嵌入到一个较大的空间 ${}_p\mathcal{H}_r(X)$ 或 ${}_p\mathscr{H}_r(X)$ 中去.

以 ${}_p\mathcal{H}_r(X)$ 和 ${}_p\mathscr{H}_r(X)$ 分别记作由序列 $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots)$ 构成的空间，其中 $\theta_i (i = 1, 2, 3, \ldots)$ 是 X 值随机变量，分别满足

$$\| \theta \|_{{}_p\mathcal{H}_r(X)} = \| \Big(\sum_{i=1}^{\infty} \| \theta_i \|^p \Big)^{1/p} \|_r < \infty$$

或

$$\| \theta \|_{{}_p\mathscr{H}_r(X)} = \| \Big(\sum_{i=1}^{\infty} E(\| \theta_i \|^p \mid \mathscr{F}_{i-1}) \Big)^{1/p} \|_r < \infty$$

容易验证，${}_p\mathcal{H}_r(X)$ 和 ${}_p\mathscr{H}_r(X)$ 是 Banach 空间.

引理 **6.3.2**[54] 设 X 是自反空间，$1 \leqslant r \leqslant p$，$q$ 和 r' 分别是 p 和 r 的共轭数，$l(\theta)$ 是 ${}_p\mathcal{H}_r(X)$ 上的有界线性泛函，则存在 $\xi \in {}_q\mathcal{H}_{r'}(X^*)$，使得

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^{\infty} E\xi_i\theta_i, \qquad \forall\, \theta \in {}_p\mathcal{H}_r(X)$$

$$\| \xi \|_{{}_q\mathcal{H}'(X^*)} \leqslant \| l \|$$

类似于定理 6.3.1 可证

引理 **6.3.3** 设 X 是自反空间，$1 \leqslant r \leqslant p$，$q$ 和 r' 分别是 p 和 r 的共轭数，$l(\theta)$ 是 ${}_p\mathscr{H}_r(X)$ 上的有界线性泛函，则存在 $\zeta \in {}_q\mathscr{H}_{r'}(X^*)$，使得

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^{\infty} E\zeta_i\theta_i, \ \forall\, \theta \in {}_p\mathscr{H}_r(X)$$

$$\| \zeta \|_{{}_q\mathscr{H}'(X^*)} \leqslant \| l \|$$

定理 **6.3.4** 设 X 是 Banach 空间，$1 < p \leqslant r \leqslant \infty$，$p \neq \infty$，则存在 $C = C_{p,r} > 0$，使得对于每个 $\xi \in {}_p\mathcal{H}_r(X)$ 和 $\zeta \in {}_p\mathscr{H}_r(X)$，若分别以

$$\varphi_n = \sum_{i=1}^{n} [E(\xi_i \mid \mathscr{F}_i) - E(\xi_i \mid \mathscr{F}_{i-1})], \qquad \varphi_0 = 0$$

$$\psi_n = \sum_{i=1}^{n} [E(\zeta_i \mid \mathscr{F}_i) - E(\zeta_i \mid \mathscr{F}_{i-1})], \qquad \psi_0 = 0$$

为鞅，则

$$\| \varphi \|_{{}_pK_r^S(X)} \leqslant C \| \xi \|_{{}_p\mathcal{H}_r(X)} \tag{6.3.6}$$

$$\| \psi \|_{{}_pK_r^{\sigma}(X)} \leqslant C \| \zeta \|_{{}_p\mathscr{H}_r(X)} \tag{6.3.7}$$

证明 这里仅证(6.3.6)式，类似可证(6.3.7)式. 显然 $\varphi = (\varphi_n)_{n\geqslant 0}$ 为 X 值鞅，记

$$g = \Big(\sum_{i=1}^{\infty} \| \xi_i \|^p \Big)^{1/p}$$

$$g^* = \sup_n E(g \mid \mathscr{F}_n)$$

则 $\xi \in {}_p\mathcal{H}_r(X)$ 表明 $g \in L_r$，因为 $r > 1$，据 Doob 不等式亦有 $g^* \in L_r$. 当 $i \geqslant n+1$ 时，

$$\begin{aligned}
& E(\| d\varphi_i \|^p \mid \mathscr{F}_n) \\
= & E(E(\| d\varphi_i \|^p \mid \mathscr{F}_{i-1}) \mid \mathscr{F}_n) \\
\leqslant & 2^{p-1} E\Big(\| E(\xi_i \mid \mathscr{F}_i) \|^p + \\
& \| E(\xi_i \mid \mathscr{F}_{i-1}) \|^p \mid \mathscr{F}_n \Big) \\
\leqslant & 2^p E(\| \xi_i \|^p \mid \mathscr{F}_n)
\end{aligned}$$

而当 $i = n$ 时

$$\begin{aligned}
\| d\varphi_i \|^p & \leqslant 2^{p-1} (\| E(\xi_n \mid \mathscr{F}_n) \|^p + \| E(\xi_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) \|^p) \\
& \leqslant 2^{p-1} (E(\| \xi_n \|^p \mid \mathscr{F}_n) + (g^*)^p)
\end{aligned}$$

从而

$$\sum_{i=n}^{\infty} E(\| d\varphi_i \|^p \mid \mathscr{F}_n)$$

$$\leqslant 2^p \sum_{i=n}^{\infty} E(\| \xi_i \|^p \mid \mathscr{F}_n) + 2^{p-1} E((g^*)^p \mid \mathscr{F}_n)$$

$$\leqslant 2^p E(g^p \mid \mathscr{F}_n) + 2^{p-1} E((g^*)^p \mid \mathscr{F}_n)$$

$$\leqslant 2^p E(g^p + (g^*)^p \mid \mathscr{F}_n)$$

故

$$E(S^{(p)}(\varphi) - S_{n-1}^{(p)}(\varphi) \mid \mathscr{F}_n) \leqslant 2^p E(g^p + (g^*)^p \mid \mathscr{F}_n) \leqslant CE((g^*)^p \mid \mathscr{F}_n)$$

从而

$$\| \varphi \|_{{}_pK_r^S(X)} \leqslant C \| g \|_r \leqslant C \| \xi \|_{{}_p\mathscr{H}_r(X)}$$

于是(6.3.6)式得证. □

定理 6.3.5 设 X 是自反空间,$1 \leqslant r \leqslant p < \infty$,$q$ 和 r' 分别是 p 和 r 的共轭数,则 ${}_pH_r^S(X)$ 和 ${}_pH_r^\sigma(X)$ 的共轭空间分别是 ${}_qK_{r'}^S(X^*)$ 和 ${}_qK_{r'}^\sigma(X^*)$.

证明 由定理 6.3.1 知,${}_qK_{r'}^S(X^*) \subset ({}_pH_r^S(X))^*$. 把 ${}_pH_r^S(X)$ 当作 ${}_p\mathscr{H}_r(X)$ 的子空间,其中每个 $\theta = df = (df_1, df_2, \cdots)$,$f = (f_n)_{n \geqslant 0} \in {}_pH_r^S(X)$. 根据 Hahan-Banach 延拓定理,当 $l \in ({}_pH_r^S(X))^*$ 时,将 l 延拓为 ${}_p\mathscr{H}_r(X)$ 上的有界线性泛函并且保持原范数不变. 由引理 6.3.2 知,存在 $\xi \in {}_q\mathscr{H}_{r'}(X^*)$ 使得引理中的式子成立. 注意到 $1 < q \leqslant r' \leqslant \infty$,$q \neq \infty$,定理 6.3.4 保证了存在鞅 $\varphi = (\varphi_n)_{n \geqslant 0} \in {}_qK_{r'}^S(X^*)$,使得

$$\| \varphi \|_{{}_qK_{r'}^S(X^*)} \leqslant C \| \xi \|_{{}_q\mathscr{H}_{r'}(X^*)} \leqslant C \| l \|$$

这说明 $({}_pH_r^S(X))^* \subset {}_qK_{r'}^S(X^*)$. 于是 ${}_qK_{r'}^S(X^*)$ 是 ${}_pH_r^S(X)$ 的共轭. 同理可证 ${}_qK_{r'}^\sigma(X^*)$ 是 ${}_pH_r^\sigma(X)$ 的共轭. □

特别地,当 $r=1$ 时,由上述定理可得 H_1-BMO 对偶定理的推广如下:

推论 6.3.1 设 X 为自反 Banach 空间,$1 \leqslant p < \infty$,则

$${}_pH_1^S(X)^* = {}_qBMO_q^S(X^*)$$

且

$${}_pH_1^\sigma(X)^* = {}_qBMO_q^\sigma(X^*)$$

其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

由定理 6.1.1,6.1.2 和 6.3.3,可得如下推论:

推论 6.3.2 设 X 为自反 Banach 空间,$1 < p \leqslant 2$,$1 \leqslant r \leqslant p$. 则下列条件相互等价:

(i) X 是 p 一致可光滑空间;

(ii) ${}_qK_{r'}(X^*) \subset {}_pH_r^S(X)^*$,且存在常数 $C = C_{p,r} > 0$,使得对每一个鞅 $f = (f_n)_{n \geqslant 0} \in {}_qK_{r'}(X^*)$ 成立

$$\| f \|_{({}_pH_r^S(X))^*} \leqslant C \| f \|_{{}_qK_{r'}(X^*)}$$

(iii) ${}_qK_{r'}^+(X^*) \subset {}_pH_r^\sigma(X)^*$,且存在常数 $C = C_{p,r} > 0$,使得对每一个鞅 $f = (f_n)_{n \geqslant 0} \in {}_qK_r^+(X)$ 成立

$$\| f \|_{({}_pH_r^\sigma(X))^*} \leqslant C \| f \|_{{}_qK_{r'}^+(X^*)}$$

其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$.

推论 6.3.3 设 X 为自反 Banach 空间,$2 \leqslant q < \infty$,$1 \leqslant r \leqslant q$. 则下列条件相互等价:

(i) X 是 q 一致可凸空间;

(ii) ${}_qH_r^S(X)^* \subset {}_pK_{r'}(X^*)$,且存在常数 $C = C_{q,r} > 0$,使得对每一个鞅 $f = (f_n)_{n \geqslant 0} \in {}_qK_r^S(X)^*$ 成立

$$\| f \|_{{}_pK_{r'}(X^*)} \leqslant C \| f \|_{({}_qH_r^S(X))^*}$$

(iii) ${}_qH_r^\sigma(X)^* \subset {}_pK_{r'}^+(X^*)$,且存在常数 $C = C_{q,r} > 0$,使得对每一个鞅 $f = (f_n)_{n \geqslant 0} \in {}_qK_r^\sigma(X)^*$ 成立

$$\| f \|_{{}_pK_{r'}^+(X^*)} \leqslant C \| f \|_{({}_qH_r^\sigma(X))^*}$$

进一步,运用 Kwapin 定理得:

推论 6.3.4 设 X 为自反 Banach 空间,$1 \leqslant r \leqslant 2$. 则下列条件相互等价:

(i) X 同构于 Hilbert 空间;

(ii) ${}_2H_r^S(X)^* \sim {}_2K_{r'}(X^*)$；

(iii) ${}_2H_r^\sigma(X)^* \sim {}_2K_{r'}^+(X^*)$.

第七章　Sharp 函数的推广

Sharp 函数（也称 ♯ 函数）$f^\sharp$，在调和分析中起着重要作用，其首先是由 Fefferman 和 Stein 所引入的. 1973 年 Garsia[44] 将之推广到实值鞅，1990 年刘培德和龙瑞麟[61] 又将之推广到 Banach 空间值鞅的情况. 事实上，Sharp 函数 $f^\sharp$ 与 BMO 有密切联系. 最近，Weisz[79] 对实值鞅的 Sharp 函数又作了推广. 本章首先对 Banach 空间值鞅引入两类新型的 Sharp 函数 $f_r^{\sigma(p)}$ 和 $f_r^{S(p)}$，它们分别由鞅的 p 均方函数和条件 p 均方函数所生成，比本书第三章中所引进的平削算子要稍有推广. 然后，讨论这些函数的有界性和 Φ− 不等式. 所得结果给出了 Banach 空间的一致凸性和一致光滑性的一种新刻画.

定义　若 $1 < p < \infty$，$0 < r < \infty$，则 X-值鞅 $f = (f_n)_{n\geqslant 0}$ 的 Sharp 函数定义为：

$$f_r^\sharp = \sup_n f_{r,n}^\sharp,\quad f_{r,n}^\sharp = \sup_{m\geqslant n}\left[E_n\|f_m - f_{n-1}\|^r\right]^{1/r}$$

$$\widetilde{f}_r^\sharp = \sup_n \widetilde{f}_{r,n}^\sharp,\quad \widetilde{f}_{r,n}^\sharp = \sup_{m\geqslant n}\left[E_n\|f_m - f_n\|^r\right]^{1/r}$$

$$f_r^{\sigma(p)} = \sup_n\left[E_n\left(\sigma^{(p)}(f)^p - \sigma_n^{(p)}(f)^p\right)^{r/p}\right]^{1/r}$$

$$f_r^{S(p)} = \sup_n\left[E_n\left(S^{(p)}(f)^p - S_{n-1}^{(p)}(f)^p\right)^{r/p}\right]^{1/r}$$

§7.1　Sharp 函数的有界性

本节讨论 X 值鞅的 Sharp 函数 $f_r^\sharp$，$f_r^{\sigma(p)}$ 和 $f_r^{S(p)}$ 的有界性.

其中的 $f_r^{\#}$ 是由 Garsia[44] 首先对实值鞅引入的，他证明了当 $1 < p < \infty$ 时，$f_1^{\#}$ 的 L_p 范数等价于鞅 $f = (f_n)_{n\geqslant 0}$ 的 H_p 范数. 本章将对另外的两个 Sharp 函数证明类似的结论成立，所得结果将在下一章的对 X 值鞅的 Hardy 空间和 BMO 空间之间的实内插研究中起重要作用.

引理 **7.1.1**[79]　若 g 是一函数，使得对所有 $l \in N$ 有

$$E_l(|Y - Y_{l-1}|) \leqslant E_l(g) \tag{7.1.1}$$

则对任意 $\beta > \alpha > 0$ 有

$$(\beta - \alpha)E_l(\chi_{\{Y_n^* > \beta\}}) \leqslant E_l(\chi_{\{Y_n^* > \alpha\}}g) \quad (n \in N) \tag{7.1.2}$$

引理 **7.1.2**　设 $0 < r < \infty$，$1 < p < \infty$，且 $i \in N$ 固定. 假设 $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ 为非负不减函数列满足 Y_n 是 $\mathscr{F}_{n-i}$ 可测，并且 $Y_n = 0$，其中 $0 \leqslant n < i \vee 1$. 若 g 是一函数，使得对所有 $m \geqslant l \geqslant (1-i) \vee 0$ 有

$$E_l(Y_{m+i}^p - Y_{l-1+i}^p)^{r/p} \leqslant E_l(g^r) \tag{7.1.3}$$

则对任意 $\beta > \alpha > 0$ 有

$$\begin{aligned}&(\beta - \alpha)^r E_{(1-i)\vee 0}[\chi_{\{Y_{n+i} > \beta\}}] \\ &\leqslant E_{(1-i)\vee 0}[\chi_{\{Y_{n+i} > \alpha\}} g^r], \quad (n \in N)\end{aligned} \tag{7.1.4}$$

注*：当 $p = 2$ 时，此引理即 Weisz[79] 的引理 2.47，且可用同样方法证明.

定理 **7.1.3**　设 X 是 Banach 空间，$f = (f_n)_{n\geqslant 0}$ 是 X-值鞅且 $1 < p < \infty$，则存在常数 $c_r > 0$，$C_r > 0$，$c_{u,r} > 0$ 和 $C_{u,r} > 0$，使得

$$c_r \| f \|_{H_r(X)} \leqslant \| f^{\#} \|_r \leqslant C_r \| f \|_{H_r(X)} \quad (1 < r < \infty) \tag{7.1.5}$$

$$c_{u,r} \| f \|_{{}_pH_r^S(X)} \leqslant \| f_u^{S(p)} \|_r \leqslant C_{u,r} \| f \|_{{}_pH_r^S(X)} \quad (0 < u < r < \infty) \tag{7.1.6}$$

$$c_{u,r} \| f \|_{{}_pH_r^\sigma(X)} \leqslant \| f_u^{\sigma(p)} \|_r \leqslant C_{u,r} \| f \|_{{}_pH_r^\sigma(X)} \quad (0 < u < r < \infty) \tag{7.1.7}$$

证明　设 $Y_n = S_n^{(p)}(f)$，$Y = S^{(p)}(f)$ 及 $g = f_u^{S(p)}$. 易证当 i

$= 0$ 时，Y_n 和 g 满足引理 7.1.2 中条件 (7.1.3)式. 令 $\beta = 2\alpha$，由 (7.1.4)式得

$$\alpha^u E(\chi_{\{\frac{Y}{2} > \alpha\}}) \leqslant E(\chi_{\{Y > \alpha\}} g^u) \tag{7.1.8}$$

以 $r\alpha^{r-u-1}$ 乘以 (7.1.8)式两端，得

$$r\alpha^{r-1}E(\chi_{\{\frac{Y}{2} > \alpha\}}) \leqslant r\alpha^{r-u-1}E(\chi_{\{Y > \alpha\}} g^u)$$

据 Fubini 定理得

$$\begin{aligned}E\left(\left|\frac{Y}{2}\right|^r\right) &\leqslant r\int_0^\infty \alpha^{r-1}E(\chi_{\{\frac{Y}{2} > \alpha\}})\mathrm{d}\alpha \\ &\leqslant \int_0^\infty r\alpha^{r-u-1}E(\chi_{\{Y > \alpha\}} g^u)\mathrm{d}\alpha \\ &= E(rg^u\int_0^\infty \alpha^{r-u-1}\chi_{\{Y > \alpha\}}\mathrm{d}\alpha) \\ &= E(rg^u\int_0^Y \alpha^{r-u-1}\mathrm{d}\alpha) \\ &= E(\frac{r}{r-u}Y^{r-u}g^u) \\ &\leqslant c_{u,r}\left(E(Y^r)\right)^{\frac{r-u}{r}}\left(E(g^r)\right)^{\frac{u}{r}}\end{aligned}$$

于是 $\| Y \|_r \leqslant c_{u,r} \| g \|_r$，即 $\| f \|_{{}_pH_s^S(X)} \leqslant c_{u,r} \| f_u^{S(p)} \|_r$. (7.1.6)式左端不等式得证.

为证(7.1.6)式右端不等式，由 Doob 不等式得

$$\begin{aligned}\| f_u^{S(p)} \|_r &\leqslant 2\left(E\left(\sup_n E_n(S^{(p)}(f)^u)\right)^{r/u}\right)^{1/u} \\ &\leqslant C_{u,r} \| S^{(p)}(f) \|_r, \qquad (0 < u < r < \infty)\end{aligned}$$

(7.1.6)式右端不等式得证.

设 $Y_n = \| f_n \|$，$g = f^{\#}$ 且 $Y_n = \sigma_n^{(p)}(f)$，$Y = \sigma^{(p)}(f)$，由不等式(7.1.2)和(7.1.4)，用证(7.1.6)式的同样方法可证 (7.1.5)式和(7.1.7)式.　□

§7.2 Φ—不等式

本节研究关于 $f_p^{\#}$ 与 $f_p^{S(p)}$ 之间，$\widetilde{f}_p^{\#}$ 与 $f_p^{\sigma(p)}$ 之间的 Φ—不等式．设 $\Phi(u)$ 为定义在 $[0,\infty)$ 上且 $\Phi(0)=0$ 的凸函数．众所周知，任意一个这样的凸函数可表示为

$$\Phi(u)=\int_0^u \varphi(t)\mathrm{d}t, \qquad \forall\ u>0 \tag{7.2.1}$$

其中 $\varphi(t)$ 在 $[0,\infty)$ 上非负递增．

$[0,\infty)$ 上的递增连续函数 Φ 称为是限制增长的，若对所有 $\alpha>1$，存在常数 C_α，使得

$$\Phi(\alpha u)\leqslant C_\alpha\Phi(u), \qquad \forall\ u>0$$

$[0,\infty)$ 上的函数 Φ 称为 Young 函数，若

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\Phi(u)}{u}=\infty$$

定义左连续函数

$$\psi(s)=\inf\left\{u:\varphi(u)>s\right\}$$

和

$$\Psi(v)=\int_0^v \psi(s)\mathrm{d}s$$

称 Ψ 是 $\Phi(u)$ 的 Young 补函数．

对上述凸函数，定义参数

$$p_\Phi=\sup_{0<u<\infty}\frac{u\varphi(u)}{\Phi(u)}$$

Φ 的另一参数在刻画凸函数的 Young 补函数 Ψ 中起重要作用，即

$$q_\Phi=\inf_{0<u<\infty}\frac{u\varphi(u)}{\Phi(u)}$$

关于凸函数的更多的性质参见 Long[64]．

定义 7.2.1 设 (f,g) 是一 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 可测非负函数对．称 (f,g) 满足好 λ-不等式，若对任意 $\alpha>1$ 和 $\beta_n>0$，其中 $\beta_n\to0$ $(n\to\infty)$，存在 $\varepsilon_{\alpha\beta_n}$ 和 $\delta_{\alpha\beta_n}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_{\alpha\beta_n}=0$，使得

$$P(f>\alpha\lambda)\leqslant\varepsilon_{\alpha\beta_n}P(f>\lambda)+\delta_{\alpha\beta_n}P(g>\beta_n\lambda)$$
$$\forall\ \lambda>0$$

引理 7.2.1 设 Φ 是 $[0,\infty)\to[0,\infty)$ 且 $\Phi(0)=0$ 的递增连续函数，并满足限制增长条件．若 (f,g) 满足好 λ-不等式，则对任意充分小的 $\beta=\beta_n$，有

$$E(\Phi(f))\leqslant C_\alpha C_{\beta^{-1}}\delta_\beta(1-C_\alpha\varepsilon_\beta)^{-1}E(\Phi(g))$$

定理 7.2.2 设 X 是 Banach 空间，$1<p\leqslant2$，且 Φ 是增函数，则下列条件等价：

(i) X 是 p 一致可光滑空间；

(ii) 存在常数 $C=C_{p,\Phi}>0$，使得对每一个 X-值鞅 $f=(f_n)_{n\geqslant0}$ 成立

$$E\left(\Phi(f_p^{\#})\right)\leqslant CE\left(\Phi(f_p^{S(p)})\right) \tag{7.2.2}$$

(iii) 存在常数 $C=C_{p,\Phi}>0$，使得对每一个 X-值鞅 $f=(f_n)_{n\geqslant0}$ 成立

$$E\left(\Phi(\widetilde{f}_p^{\#})\right)\leqslant CE\left(\Phi(f_p^{\sigma(p)})\right) \tag{7.2.3}$$

证明 (i)⇒(ii) 设 X 同构于 p 一致光滑空间，据定理 2.4.12，对每一个 X—值 L_p 有界鞅 $f=(f_n)$，有

$$\begin{aligned}(f_p^{\#})^p&=\sup_n\sup_{m\geqslant n}E(\|f_m-f_{n-1}\|^p\mid\mathscr{F}_n)\\&\leqslant C\sup_n E\Big(\sum_{i=n}^{\infty}\|df_i\|^p\mid\mathscr{F}_n\Big)\\&=C\sup_n E_n(S^{(p)}(f)^p-S_{n-1}^{(p)}(f)^p)\\&=C(f_p^{S(p)})^p\end{aligned} \tag{7.2.4}$$

由递增性及 (7.2.3) 式得，$E(\Phi(f_p^{\#}))\leqslant CE(\Phi(f_p^{S(p)}))$．

(i)⇒(iii) 证明类似于(i)⇒(ii)，此处从略．

(ii)⇒(i) 特别地，在(7.2.1)式中令 $\Phi = t^p$，得

$$\| f_p^{\#} \|_p \leqslant C \| f_p^{S(p)} \|_p$$

运用 Doob 不等式，得

$$\begin{aligned} \| f_p^{S(p)} \|_p &= \| \sup_n \left(E_n(S^{(p)}(f)^p - S_{n-1}^{(p)}(f)^p) \right)^{1/p} \|_p \\ &\leqslant \| \sup_n (E_n(S^{(p)}(f)^p))^{1/p} \|_p \\ &\leqslant C_1 \| S^{(p)}(f) \|_p \end{aligned}$$

另一方面，显然

$$\| f_p^{\#} \|_p \geqslant \| f \|_p$$

于是

$$\| f \|_p \leqslant C \| S^{(p)}(f) \|_p$$

据定理 2.4.12，上式表明 X 是 p 一致可光滑空间.

(iii)⇒(i) 证明类似于(ii)⇒(i)，此处从略. □

推论 7.2.1 设 X 是 Banach 空间，$1 < p \leqslant 2$，则下列条件等价：

(i) X 是 p 一致可光滑空间；

(ii) 存在常数 $C = C_p > 0$，使得对每一个 X－值鞅 $f = (f_n)_{n\geqslant 0}$ 成立

$$\| f_p^{\#} \|_p \leqslant C \| f_p^{S(p)} \|_p$$

(iii) 存在常数 $C = C_p > 0$，使得对每一个 X－值鞅 $f = (f_n)_{n\geqslant 0}$ 成立

$$\| \widetilde{f}_p^{\#} \|_p \leqslant C \| f_p^{\sigma(p)} \|_p$$

定理 7.2.3 设 X 是 Banach 空间，$2 \leqslant q < \infty$ 且 Φ 是限制增长 Young 函数，则下列条件等价：

(i) X 是 q 一致可凸空间；

(ii) 存在常数 $C = C_{q,\Phi} > 0$，使得对每一个 X－值鞅 $f = (f_n)_{n\geqslant 0}$ 成立

$$\| (f_q^{S(q)})^q \|_\Phi^{1/q} \leqslant C \| (f_q^{\#})^q \|_\Phi^{1/q} \qquad (7.2.5)$$

(iii) 存在常数 $C = C_{q,\Phi} > 0$，使得对每一个 X－值鞅 $f = (f_n)_{n\geqslant 0}$ 成立

$$\| (f_q^{\sigma(q)})^q \|_\Phi^{1/q} \leqslant C \| (\widetilde{f}_q^{\#})^q \|_\Phi^{1/q} \qquad (7.2.6)$$

证明 (i)⇒(ii) 对任一 X－值鞅 $f = (f_n)$，定义

$$f_{r,n}^{S(q)} = \sup_{m\leqslant n} \left((E_m(S^{(q)}(f)^q - S_m^{(q)}(f)^q)^{r/q} \right)^{1/r}$$

则 $f_r^{S(q)} = \sup_n f_{r,n}^{S(q)}$. 对任给 $\alpha > 0$，$\beta > 0$，$\lambda > 0$，令

$$\tau = \inf\{n : (f_{q,n}^{S(q)})^q > (1+\alpha)\lambda\}$$

$$\theta = \inf\{n : (f_{q,n}^{S(q)})^q > \alpha\lambda\}$$

$$\mu = \inf\{n : (f_{q,n}^{\#})^q > \beta\lambda\}$$

显然 τ，θ 和 μ 都为停时，且 $\theta \leqslant \tau$. 则

$$P(\tau < \infty) \leqslant P(\tau < \infty, \theta < \mu) + P(\mu < \infty)$$

其中

$$\begin{aligned} & P(\tau < \infty, \theta < \mu) \\ \leqslant & P(\theta < \mu, (f_{q,\tau}^{S(q)})^q - (f_{q,\theta-1}^{S(q)})^q > \lambda) \\ \leqslant & \frac{1}{\lambda} \int_{\{\theta<\mu\}} \left((f_{q,\tau}^{S(q)})^q - (f_{q,\theta-1}^{S(q)})^q \right) \mathrm{d}P \\ \leqslant & \frac{1}{\lambda} \int_{\{\theta<\mu\}} \left(\sup_{m\leqslant\tau} E\left(\sum_{i=m}^{\infty} \| df_i \|^q \mid \mathscr{F}_m \right) - \right. \\ & \left. \sup_{m\leqslant\theta-1} E\left(\sum_{i=m}^{\infty} \| df_i \|^q \mid \mathscr{F}_m \right) \right) \mathrm{d}P \\ \leqslant & \frac{2}{\lambda} \int_{\{\theta<\mu\}} \sup_{\theta\leqslant m\leqslant\tau} E\left(\sum_{i=m}^{\infty} \| df_i \|^q \mid \mathscr{F}_m \right) \mathrm{d}P \\ \leqslant & \frac{2}{\lambda} \int_{\{\theta<\mu\}} \sup_{\theta\leqslant m\leqslant\tau} E\left(\sum_{i=m}^{\infty} \| df_i \|^q \mid \mathscr{F}_\theta \right) \mathrm{d}P \\ \leqslant & \frac{2}{\lambda} \int_{\{\theta<\mu\}} E\left(\sum_{i=\theta}^{\infty} \| df_i \|^q \mid \mathscr{F}_\theta \right) \mathrm{dP} \\ \leqslant & \frac{2C_q}{\lambda} \int_{\{\theta<\mu\}} \sup_{m\geqslant\theta} E(\| f_m - f_{\theta-1} \|^q \mid \mathscr{F}_\theta) \mathrm{d}P \\ \leqslant & \frac{2C_q}{\lambda} \int_{\{\theta<\mu\}} (f_{q,\theta}^{\#})^q \mathrm{d}P \end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{2C_q}{\lambda}\beta\lambda\int_{\{\theta<\mu\}} \mathrm{d}P \leqslant 2C\beta P(\mu<\infty)$$

于是

$$P((f_q^{S(q)})^q > (1+\alpha)\lambda)$$
$$\leqslant 2C\beta P((f_q^{S(q)})^q > \alpha\lambda) + P((f_q^{\#})^q > \beta\lambda)$$

这说明$((f_q^{S(q)})^q, (f_q^{\#})^q)$满足$\lambda$-不等式. 当$\beta$充分小，存在常数$C=C_{q,\Phi}$，使得

$$\|(f_q^{S(q)})^q\|_{\Phi}^{1/q} \leqslant C\|(f_q^{\#})^q\|_{\Phi}^{1/q}$$

(7.2.5)式得证.

(i)⇒(iii)　任给鞅$f=(f_n)$和$\alpha>0$，$\beta>0$，$\lambda>0$，令

$$\tau' = \inf\{n:(f_{q,n+1}^{\sigma(q)})^q > (1+\alpha)\lambda\}$$
$$\theta' = \inf\{n:(f_{q,n+1}^{\sigma(q)})^q > \alpha\lambda\}$$
$$\mu' = \inf\{n:(\widetilde{f}_{q,n}^{\#})^q > \beta\lambda\}$$

其余的证明类似于(i)⇒(ii)，此处从略.

(ii)⇒(i)和(iii)⇒(i)　设$f=(f_n)$为X-值Walsh-Paley鞅，满足$\|f\|_\infty<\infty$. 由(7.2.5)式得

$$\|S^{(q)}(f)^q\|^{1/q} \leqslant \|(f_q^{S(q)})^q\|_{\Phi}^{1/q}$$
$$\leqslant C\|(f_q^{\#})^q\|_{\Phi}^{1/q}$$
$$\leqslant 2C\Phi(\|f\|_\infty^q)^{1/q} < \infty$$

故$S^{(q)}(f)<\infty$　$a.e.$，从而X同构于q一致凸滑空间. 类似地由(7.2.6)式，得

$$\|\sigma^{(q)}(f)^q\|^{1/q} \leqslant \|(f_q^{\sigma(q)})^q\|_{\Phi}^{1/q} \leqslant C\|(\widetilde{f}_q^{\#})^q\|_{\Phi}^{1/q}$$
$$\leqslant 2C\Phi(\|f\|_\infty^q)^{1/q} < \infty$$

故$\sigma^{(q)}(f)<\infty$　$a.e.$. 既然对X-值Walsh-Paley鞅有$\sigma^{(q)}(f)=S^{(q)}(f)$，则$X$是$q$一致可凸空间. □

注意到

$$\|f\|_q \sim \|f_q^{\#}\|_q \sim \|\widetilde{f}_q^{\#}\|_q$$

则得下列推论：

推论 7.2.2　设X是Banach空间，$2\leqslant q<\infty$且Φ是限制增长Young函数，则下列条件等价：

(i) X是q一致可凸空间；

(ii) 存在常数$C=C_q>0$，使得对每一个X-值鞅$f=(f_n)_{n\geqslant 0}$成立

$$\|f_q^{S(q)}\|_q \leqslant C\|f\|_q$$

(iii) 存在常数$C=C_q>0$，使得对每一个X-值鞅$f=(f_n)_{n\geqslant 0}$成立

$$\|f_q^{\sigma(q)}\|_q \leqslant C\|f\|_q$$

利用Kwapien定理和定理7.2.2，定理7.2.3得：

推论 7.2.3　设X是Banach空间，Φ为限制增长的Young函数且$q_\Phi>1$，则下列条件等价：

(i) X同构于Hilbert空间；

(ii) 存在常数$C=C_\Phi>0$，使得对每一个X-值鞅$f=(f_n)_{n\geqslant 0}$成立

$$C^{-1}\|(f_2^{\#})^2\|_{\Phi}^{1/2} \leqslant \|(f_2^{S(2)})^2\|_{\Phi}^{1/2} \leqslant C\|(f_2^{\#})^2\|_{\Phi}^{1/2}$$

和

$$C^{-1}\|(\widetilde{f}_2^{\#})^2\|_{\Phi}^{1/2} \leqslant \|(f_2^{\sigma(2)})^2\|_{\Phi}^{1/2} \leqslant C\|(\widetilde{f}_2^{\#})^2\|_{\Phi}^{1/2}$$

(iii) 存在常数$C=C_\Phi>0$，使得对每一个X-值鞅$f=(f_n)_{n\geqslant 0}$成立

$$\|f\|_2 \leqslant C\|f_2^{S(2)}\|_2$$
$$\|f\|_2 \leqslant C\|f_2^{\sigma(2)}\|_2$$

第八章　B值鞅空间的实内插

§8.1　引　言

众所周知，L_p 之间的实内插空间是 Lorentz 空间，Lorentz 空间之间的实内插空间仍是 Lorentz 空间，即(参见 Bergh[5])

$$(L_{r_0,s_0},\ L_{r_1,s_1})_{\theta,s} = L_{r,s}$$

其中：$\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{r_0} + \frac{1}{r_1}$，$\quad 0<\theta<1$，$\quad r_0 \neq r_1$，$\quad 0<r_i, s_i, s \leqslant \infty$.

在参考文献[42]中，Fefferman 和 Stein 用复方法研究了 H_1 与 L_r 之间的内插空间问题，证明了：

$$(H_1,\ L_{r_1})_\theta = L_r$$

其中：$\frac{1}{r} = (1-\theta) + \frac{\theta}{r_1}$，$1<r_1 \leqslant \infty$.

而在参考文献[41]中，Fefferman，Riviere 和 Sagher 用实方法进一步证明了：

$$(H_{r_0,s_0},\ H_{r_1,s_1})_{\theta,s} = H_{r,s},\qquad \frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{r_0} + \frac{1}{r_1}$$

$$0<\theta<1,\quad 0<r_0<r_1<\infty,\quad 0<s_i, s \leqslant \infty$$

其中：$H_{r,s} = L_{r,s}$ 若 $r>1$.

Hanks[45]和 Bennett-Sharply[3]，研究了 H_{r_0,s_0} 和 BMO 之间的内插空间问题，证明了：

$$(H_{r_0,s_0},\ BMO)_{\theta,s} = H_{r,s},\qquad \frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{r_0}$$

$$0<\theta<1,\quad 0<r_0<\infty,\quad 0<s_0, s \leqslant \infty$$

本章将对 B-值鞅的 Hardy-Lorentz 空间建立类似结论. 为此，首先回顾经典 Lorentz 空间的一些术语和性质，然后对 B—值鞅引入 Hardy-Lorentz 空间.

对于可测函数 φ，其分布函数 $m(y,\varphi)$ 定义为

$$m(y,\varphi) = P\Big(\{\omega:\ |\varphi(\omega)| > y\}\Big)\quad (y \geqslant 0)$$

其非增加重排定义为

$$\tilde{\varphi}(t) = \inf\{\ y:\ m(y,\varphi) \leqslant t\}$$

显然 $\tilde{\varphi}$ 非增，右连续且与 φ 等测度，即

$$m(x,\ \tilde{\varphi}) = m(x,\ \varphi)\qquad (x \geqslant 0)$$

若 $0<r,s<\infty$，Lorentz 空间 $L_{r,s}$ 定义为

$$\|\varphi\|_{L_{r,s}} = \Big(\int_0^\infty \tilde{\varphi}(t)^s\, t^{s/r}\, \frac{\mathrm{d}t}{t}\Big)^{1/s}$$

且对 $0<r\leqslant\infty$

$$\|\varphi\|_{L_{r,\infty}} = \sup_t\{t^{1/r}\tilde{\varphi}(t)\}$$

设

$$\begin{aligned} L_{r,s} &= L_{r,s}(\Omega,\ \mathscr{F},\ P) \\ &= \{\ \varphi:\ \|\varphi\|_{L_{r,s}} < \infty\ \} \\ &\quad \forall\quad 0<r,s\leqslant\infty \end{aligned}$$

易证 $L_{r,r} = L_r(0<r\leqslant\infty)$.

若 $0<p\leqslant\infty$ 且 $0<r,\ s\leqslant\infty$，则 X-值鞅 Hardy-Lorentz 空间 $H_{r,s}(X)$，${}_pH^\sigma_{r,s}(X)$，${}_pH^S_{r,s}(X)$，$D_{r,s}(X)$ 和 ${}_pQ_{r,s}(X)$ 定义如下：

$$\|f\|_{H_{r,s}(X)} = \|f^*\|_{L_{r,s}},\qquad \|f\|_{{}_pH^\sigma_{r,s}(X)} = \|\sigma^{(p)}(f)\|_{L_{r,s}}$$

$$\|f\|_{{}_pH^S_{r,s}(X)} = \|S^{(p)}(f)\|_{L_{r,s}}$$

和

$$\|f\|_{D_{r,s}(X)} = \|\lim_{n\to\infty}\lambda_n\|_{L_{r,s}}$$

$$\|f\|_{{}_pQ_{r,s}(X)} = \|\lim_{n\to\infty}\rho_\infty\|_{L_{r,s}}$$

其中 λ_n 和 ρ_n 分别是可料非负关于 $\|f_n\|$ 和 $S_n^{(p)}(f)$ 的最小控制.

注意当 $r=s$ 时，$H_{r,r}(X)=H_r(X)$，${}_pH^{\sigma}_{r,r}(X)={}_pH^{\sigma}_r(X)$，${}_pH^{S}_{r,r}(X)={}_pH^{S}_r(X)$，$D_{r,r}(X)=D_r(X)$，${}_pQ_{r,r}(X)={}_pQ_r(X)$.

假设 A_0 和 A_1 是连续嵌入拓扑向量空间 A 的两个赋拟范空间，则 A_0 与 A_1 的实内插空间由内插函数 $K(t,f,A_0,A_1)$ 定义. 若 $f\in A_0+A_1$，定义

$$K(t,f,A_0,A_1)=\inf_{f=f_0+f_1}\{\|f_0\|_{A_0}+t\|f_1\|_{A_1}\}$$

其中的 inf 遍历所有可能选择 f_0 和 f_1 使 $f_0\in A_0$ 和 $f_1\in A_1$ 且 $f=f_0+f_1$.

实内插空间 $(A_0,A_1)_{\theta,s}$ 定义为 A_0+A_1 中的所有函数 f 的空间，其满足

$$\|f\|_{(A_0,A_1)_{\theta,s}}=\left(\int_0^{\infty}[t^{-\theta}K(t,f,A_0,A_1)]^s\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{1/s}<\infty$$

其中 $0<\theta<1$ 且 $0<s\leqslant\infty$.

假设 B_0 和 B_1 是拓扑向量空间 B 的两个赋拟范子空间. 映射

$$T:A_0+A_1\to B_0+B_1$$

称为 $(A_0,A_1)\to(B_0,B_1)$ 的拟线性映射，若任给 $f\in A_0+A_1$ 和 $f_i\in A_i$ 且 $f_0+f_1=f$，则存在 $g_i\in B_i$ 使得

$$T(f)=g_0+g_1$$

和

$$\|g_i\|_{B_i}\leqslant K_i\|f_i\|_{A_i}\qquad(K_i>0,\ i=0,1)$$

定理 8.1.1(Marcinkiewicz)　若 $0<s\leqslant\infty$，$0\leqslant\theta\leqslant1$ 且 T 是拟线性映射由 (A_0,A_1) 到 (B_0,B_1) 则

$$T:(A_0,A_1)_{\theta,s}\to(B_0,B_1)_{\theta,s}$$

且

$$\|T(f)\|_{(B_0,B_1)_{\theta,s}}\leqslant K_0^{1-\theta}K_1^{\theta}\|f\|_{(A_0,A_1)_{\theta,s}}$$

定理 8.1.2(重复定理)　假设 $0\leqslant\theta_0\leqslant\theta_1\leqslant1$，$0<s_0$，$s_1\leqslant\infty$ 和 $X_i=(A_0,A_1)_{\theta_i,s_i}$　$(i=0,1)$. 若 $0<\eta<1$，$0<s\leqslant\infty$，则

$$(X_0,X_1)_{\eta,s}=(A_0,A_1)_{\theta,s}$$

其中：$\theta=(1-\eta)\theta_0+\eta\theta_1$.

定理 8.1.3(对偶定理)　假设 A_i 是 Banach 空间，$A_0\cap A_1$ 在 $A_i(i=0,1)$ 中稠密. 若 $0<\theta<1$，且 $1\leqslant s<\infty$，则

$$(A_0,A_1)^*_{\theta,s}=(A_0^*,A_1^*)_{\theta,s'}$$

其中：$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1$，$X^*$ 是 X 对偶空间.

定理 8.1.4(Hardy 不等式)　若 $1\leqslant r\leqslant\infty$，$s>0$，$f$ 为 $(0,\infty)$ 的非负函数，则

$$\left(\int_0^{\infty}\left(\int_0^t f(u)\mathrm{d}u\right)^r t^{-s}\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{\frac{1}{r}}\leqslant\frac{r}{s}\left(\int_0^{\infty}[tf(t)]^r t^{-s}\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$\left(\int_0^{\infty}\left(\int_t^{\infty} f(u)\mathrm{d}u\right)^r t^{s}\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{\frac{1}{r}}\leqslant\frac{r}{s}\left(\int_0^{\infty}[tf(t)]^r t^{s}\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{\frac{1}{r}}$$

定理 8.1.5　若 $0<r_0<\infty$，　$0<\theta<1$，　$r\leqslant s\leqslant\infty$，则

$$(L_{r_0},L_{\infty})_{\theta,s}=L_{r,s},\qquad\frac{1}{r}=\frac{1-\theta}{r_0}$$

利用稳定性定理得：

推论 8.1.1　设 $0<\eta<1$，　$0<r_0$，$r_1,s_0,s_1,s\leqslant\infty$. 若 $r_0\neq r_1$，则

$$(L_{r_0,s_0},L_{r_1,s_1})_{\eta,s}=L_{r,s},\qquad\frac{1}{r}=\frac{1-\eta}{r_0}+\frac{\eta}{r_1}$$

特别地

$$(L_{r_0},L_{r_1})_{\eta,r}=L_r,\qquad\frac{1}{r}=\frac{1-\eta}{r_0}+\frac{\eta}{r_1}$$

进一步，当 $0<r<\infty$ 时

$$(L_{r,s_0},L_{r,s_1})_{\eta,s}=L_{r,s},\qquad\frac{1}{s}=\frac{1-\eta}{s_0}+\frac{\eta}{s_1}$$

定理 8.1.6(General Hardy's inequality)　设 f 为 $(0,\infty)$ 上的非负不增函数，$0<r\leqslant\infty$，$0<s<r$. 则(记 $r_0=\min(1,r)$)

$$\left(\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{t}\int_0^t f(u)\mathrm{d}u\right)^r t^s\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{\frac{1}{r}}\leqslant\left(\frac{r}{r-s}\right)^{\frac{1}{r_0}}\left(\int_0^{\infty}f(t)^r t^s\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{\frac{1}{r}}$$

注*:(1) 定理 8.1.1～8.1.5 的证明参见 Bergh-Lőfstrő[5] 和 Benntt-Sharply[3]，定理 8.1.4 的证明参见 Stein-Weiss[72]，Weisz[79] 和 Long[54].

(2) Hardy 不等式的推广，即定理 8.1.6 参见 Weisz[79] and Long[64].

(3) 对实值鞅，Hardy-Lorentz 空间最早由 Long R. L.[64] 引进，而Banach 空间值鞅的 Hardy-Lorentz 空间是由 Long R. L. 和 Liu P. D.[66] 引进的.

§8.2 鞅 Hardy 空间之间的实内插

在正规性条件下，Weisz[76] 和 Long[64] 利用原子分解方法研究了实值鞅 Hardy 空间之间的实内插，而 Long-Liu[66] 研究了 Banach 空间值鞅 Hardy 空间之间的实内插. 本节将进一步研究 Banach 空间值鞅 Hardy 空间 ${}_pH_r^\sigma(X)$，${}_pQ_r(X)$ 和 $D_r(X)$ 的实内插，这里既不需要正规性条件，也不要求上述空间具有原子分解.

值得指出的是，若 X 同构于 p 一致光滑空间，则 ${}_pH_r^\sigma(X)$ 和 ${}_pQ_r(X)$ 都具有某种原子分解，因而这些空间的实内插可以用 Weisz[79] 中同样的方法讨论. 然而，我们的兴趣是讨论当 X 是一般的 Banach 空间时的情况.

本节将证明 Hardy-Lorentz 空间 ${}_pH_{r,s}^\sigma(X)$，${}_pQ_{r,s}(X)$ 和 $D_{r,s}(X)$ 的实内插在 K-方法下是封闭的. 由内插稳定性，只需分别讨论 $({}_pH_r^\sigma(X), {}_pH_\infty^\sigma(X))_{\theta,s}$，$({}_pQ_r(X), {}_pQ_\infty(X))_{\theta,s}$ 和 $(D_r(X), D_\infty(X))_{\theta,s}$. 为此，首先给出 K-泛函的一种估计.

引理 8.2.1 设 X 是 Banach 空间，且 $0 < r < \infty$，$1 < p < \infty$. 则存在常数 $C = C_r > 0$，使得对任意 X-值鞅 $f = (f_n)_{n\geqslant 0}$

(i) 若 $K(t, f, {}_pH_r^\sigma(X), {}_pH_\infty^\sigma(X)) = \inf\limits_{f=f_0+f_1}\left\{\|f_0\|_{{}_p\Sigma_r(X)} + t\|f_1\|_{{}_p\Sigma_\infty(X)}\right\}$，则

$$C^{-1}\int_0^{t^r}\tilde{\sigma}^{(p)}(f)^r(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$\leqslant K(t,f)^r \leqslant C\int_0^{t^r}\tilde{\sigma}^{(p)}(f)^r(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{8.2.1}$$

(ii) 若 $K(t, f, {}_pQ_r(X), {}_pQ_\infty(X)) = \inf\limits_{f=f_0+f_1}\left\{\|f_0\|_{{}_pQ_r(X)} + t\|f_1\|_{{}_pQ_\infty(X)}\right\}$，则

$$C^{-1}\int_0^{t^r}\tilde{\lambda}_\infty^r(\tau)\mathrm{d}\tau \leqslant K(t,f)^r \leqslant C\int_0^{t^r}\tilde{\lambda}_\infty^r(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{8.2.2}$$

(iii) 若 $K(t, f, D_r(X), D_\infty(X)) = \inf\limits_{f=f_0+f_1}\left\{\|f_0\|_{D_r(X)} + t\|f_1\|_{D_\infty(X)}\right\}$，则

$$C^{-1}\int_0^{t^r}\tilde{\rho}_\infty^r(\tau)\mathrm{d}\tau \leqslant K(t,f)^r \leqslant C\int_0^{t^r}\tilde{\rho}_\infty^r(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{8.2.3}$$

其中 λ_n 和 ρ_n 分别是可料非负关于 $S_n^{(p)}(f)$ 和 $\|f_n\|$ 的最小控制.

证明 (i) 往证(8.2.1)式. 对任意 $f = f_0 + f_1 \in {}_pH_r^\sigma(X) + {}_pH_\infty^\sigma(X)$，其中 $f_0 = (f_{0,n})_{n\geqslant 0}$，$f_1 = (f_{1,n})_{n\geqslant 0}$，既然

$$\sigma^{(p)}(f) \leqslant \sigma^{(p)}(f_0) + \sigma^{(p)}(f_1)$$

且

$$\tilde{\sigma}^{(p)}(f) \leqslant \tilde{\sigma}^{(p)}(f_0) + \|\sigma^{(p)}(f_1)\|_\infty$$

于是

$$\begin{aligned}\int_0^{t^r}\tilde{\sigma}^{(p)}(f)^r(\tau)\mathrm{d}\tau &\leqslant \int_0^{t^r}\left(\tilde{\sigma}^{(p)}(f_0) + \|\sigma^{(p)}(f_1)\|_\infty\right)^r(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &\leqslant C\left(\int_0^{t^r}\tilde{\sigma}^{(p)}(f)^r(\tau)\mathrm{d}\tau + t^r\|\sigma^{(p)}(f_1)\|_\infty^r\right) \\ &\leqslant C(\|f_0\|_{{}_pH_r^\sigma(X)}^r + t^r\|\sigma^{(p)}(f_1)\|_\infty^r) \\ &\leqslant C(\|f_0\|_{{}_pH_r^\sigma(X)} + t\|f_1\|_{{}_pH_\infty^\sigma(X)})^r\end{aligned}$$

(8.2.1)式左端不等式得证.

另一方面，$\forall\ f \in {}_pH_r^\sigma(X) + {}_pH_\infty^\sigma$，令

$$\tau = \inf\{n \geqslant 0 : \sigma_{n+1}^{(p)}(f) > \gamma\} \tag{8.2.4}$$

其中 $\gamma = \tilde{\sigma}^{(p)}(f)(t^r)$，则 τ 为停时且满足

$$\sigma_\tau^{(p)}(f) \leqslant \gamma, \qquad P(\tau < \infty) \leqslant P(\sigma^{(p)}(f) > \gamma)$$

考虑分解 $f = f_0 + f_1$，这里

$$f_0 = (f_n - f_{\tau\wedge n})_{n\geqslant 0}, \qquad f_1 = (f_{\tau\wedge n})_{n\geqslant 0}$$

注意到

$$\begin{aligned}&\sigma_\tau^{(p)}(f_0)\chi(\{\tau = \infty\})\\ =&\sigma^{(p)}(f) - \sigma_\tau^{(p)}(f_0)\chi(\{\tau = \infty\}) = 0\end{aligned}$$

和

$$P(\tau < \infty) \leqslant P(\sigma^{(p)}(f) > \tilde{\sigma}^{(p)}(f)(t^r)) \leqslant t^r$$

从而

$$\begin{aligned}K(t,f) &\leqslant C\left(\| f_0 \|^r_{{}_pH^\sigma_r(X)} + t^r \| f_1 \|^r_{{}_pH^\sigma_\infty(X)}\right)\\ &\leqslant C\left(\int_{\{\tau<\infty\}} \sigma^{(p)}(f_0)^r \mathrm{d}P + t^r\gamma^r\right)\\ &\leqslant C\left(\int_{\{\tau<\infty\}} \sigma^{(p)}(f)^r \mathrm{d}P + \int_{\{\tau<\infty\}} \sigma^{(p)}(f_1)^r \mathrm{d}p + t^r\gamma^r\right)\\ &\leqslant C\left(\int_0^{t^\alpha} \tilde{\sigma}^{(p)}(f)^r(s)\mathrm{d}s + \gamma^r P(\tau < \infty) + t^r\gamma^r\right)\\ &\leqslant C\left(\int_0^{t^\alpha} \tilde{\sigma}^{(p)}(f)^r(s)\mathrm{d}s + 2t^r\tilde{\sigma}^{(p)}(f)^r(t^r)\right)\\ &= C\left(\int_0^{t^\alpha} \tilde{\sigma}^{(p)}(f)^r(s)\mathrm{d}s\right)\end{aligned}$$

(8.2.1)式右端不等式得证.

(ii) 代替 (8.2.4)式中的 τ，令 $\tau = \inf\{ n\geqslant 0 : \lambda_n > \gamma \}$，其中 $\gamma = \tilde{\lambda}_\infty(t^r)$，则 (8.2.2)式同理可证.

(iii) 代替(8.2.4)式中的 τ，令 $\tau = \inf\{ n\geqslant 0 : \rho_n > \gamma \}$，其中 $\gamma = \tilde{\rho}_\infty(t^r)$，则 (8.2.3)式同理可证. □

定理 8.2.2 设 X 是 Banach 空间，且 $1 < p < \infty$，$0 < r_0 < \infty$，$0 < s \leqslant \infty$，$0 < \theta < 1$，$r = r_0/(1-\theta)$，则

$$({}_pH^\sigma_{r_0}(X), {}_pH^\sigma_\infty(X))_{\theta,s} = {}_pH^\sigma_{r,s}(X) \tag{8.2.5}$$

$$({}_pQ_{r_0}(X), {}_pQ_\infty(X))_{\theta,s} = {}_pQ_{r,s}(X) \tag{8.2.6}$$

$$(D_{r_0}(X), D_\infty(X))_{\theta,s} = D_{r,s}(X) \tag{8.2.7}$$

证明 仅证(8.2.5)式，类似可证(8.2.7)式. 对任给 $f \in {}_pH^\sigma_{r_0}(X) + {}_pH^\sigma_\infty(X)$ 和 $0 < s < \infty$，由 (8.2.1)式得

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}^{(p)}(f)(t^{r_0}) &\leqslant \left(t^{-r_0}\int_0^{t^\theta} \tilde{\sigma}^{(p)}(f)^{r_0}(\tau)\mathrm{d}\tau\right)^{1/r_0}\\ &\leqslant Ct^{-1} K(t, f, {}_pH^\sigma_{r_0}(X), {}_pH^\sigma_\infty(X))\end{aligned} \tag{8.2.8}$$

于是

$$\begin{aligned}\| \sigma^{(p)}(f) \|_{L_{r,s}} &= \frac{s}{r}\int_0^\infty (t^{\frac{1}{r}}\tilde{\sigma}^{(p)}(f)(t))^s \frac{\mathrm{d}t}{t}\\ &= C\int_0^\infty \left(t^{\frac{r_0}{r}}\tilde{\sigma}^{(p)}(f)(t^{r_0})\right)^s \frac{\mathrm{d}t}{t}\\ &\leqslant C\int_0^\infty t^{\frac{r_0}{r}-1} K\left(t, f, {}_pH^\sigma_{r_0}(X), {}_pH^\sigma_\infty(X)\right)^s \frac{\mathrm{d}t}{t}\\ &\leqslant C \| f \|^s_{({}_pH^\sigma_{r_0}(X), {}_pH^\sigma_\infty(X))_{\theta,s}}\end{aligned}$$

若 $s = \infty$，由(8.2.8)式得

$$\begin{aligned}\| \sigma^{(p)}(f) \|_{L_{r,\infty}} &= \sup_{t>0} t^{1/r}\tilde{\sigma}^{(p)}(f)(t)\\ &= \sup_{t>0} t^{\frac{r_0}{r}}\tilde{\sigma}^{(p)}(f)(t^{r_0})\\ &\leqslant C \sup_{t>0} t^{\frac{r_0}{r}} K\left(t, f, {}_pH^\sigma_{r_0}(X), {}_pH^\sigma_\infty(X)\right)\\ &\leqslant C \| f \|_{({}_pH^\sigma_{r_0}(X), {}_pH^\sigma_\infty(X))_{\theta,\infty}}\end{aligned}$$

此表明 $\left({}_pH^\sigma_{r_0}(X), {}_pH^\sigma_\infty(X)\right)_{\theta,s} \subset {}_pH^\sigma_{\theta,s}(X)$.

另一方面，若 $s < \infty$，由 (8.2.1)式和 Hardy 不等式，得

$$\begin{aligned}\| f \|^s_{({}_pH^\sigma_{r_0}(X), {}_pH^\sigma_\infty(X))_{\theta,s}} &= \int_0^\infty \left(t^{-\theta}K\left(t, f, {}_pH^\sigma_{r_0}(X), {}_pH^\sigma_\infty(X)\right)\right)^s \frac{\mathrm{d}t}{t}\\ &\leqslant C\int_0^\infty t^{-\theta s}\left(\int_0^{t^\theta} \tilde{\sigma}^{(p)}(f)^{r_0}(\tau)\mathrm{d}\tau)^{\frac{s}{r_0}}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t}\\ &\leqslant C\int_0^\infty t^{\frac{(1-\theta)s}{r_0}}\left(\frac{1}{t}\int_0^t \tilde{\sigma}^{(p)}(f)^{r_0}(\tau)\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{s}{r_0}} \frac{\mathrm{d}t}{t}\end{aligned}$$

$$\leqslant C\int_0^\infty t^{\frac{(1-\theta)s}{r_0}}\tilde{\sigma}^{(p)}(f)^s(t)\frac{\mathrm{d}t}{t}$$
$$=C\ \|\ \sigma^{(p)}(f)\|_{L_{r,s}}^s$$
对 $s=\infty$，类似可得
$$\|f\|_{({}_pH_{r_0}^\sigma(X),{}_pH_\infty^\sigma(X))_{\theta,\infty}}=\sup_{t>0}t^{-\theta}K(t,f,{}_pH_{r_0}^\sigma(X),{}_pH_\infty^\sigma(X))$$
$$\leqslant C\sup_{t>0}t^{-\theta}\left(\int_0^{t^\theta}\tilde{\sigma}^{(p)}(f)^{r_0}(\tau)\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{r_0}}$$
$$\leqslant C\sup_{t>0}t^{\frac{1-\theta}{r_0}}\tilde{\sigma}^{(p)}(f)(t)\ t^{-\theta}\left(\int_0^{t^\theta}\tau^{\theta-1}\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{r_0}}$$
$$=C\ \|\ \sigma^{(p)}(f)\|_{L_{r,\infty}}$$
此表明 ${}_pH_{\theta,s}^\sigma(X)\subset({}_pH_{r_0}^\sigma(X),{}_pH_\infty^\sigma(X))_{\theta,s}$. □

由重复定理可得如下推论：

推论 8.2.1 假设 $0<\theta<1$，$1<p<\infty$，且 $0<r_0$，$r_1<\infty$，$0<s_0$，$s_1\leqslant\infty$，若 $r_0\neq r_1$，$\frac{1}{r}=\frac{1-\theta}{r_0}+\frac{\theta}{r_1}$，$1\leqslant s\leqslant\infty$，则
$$({}_pH_{r_0,s_0}^\sigma(X),{}_pH_{r_1,s_1}^\sigma(X))_{\theta,s}={}_pH_{r,s}^\sigma(X)$$
$$({}_pQ_{r_0,s_0}(X),{}_pQ_{r_1,s_1}(X))_{\theta,s}={}_pQ_{r,s}(X)$$
$$(D_{r_0,s_0}(X),D_{r_1,s_1}(X))_{\theta,s}=D_{r,s}(X)$$

推论 8.2.2 假设 $0<\theta<1$，$1<p<\infty$，且 $0<r_0$，$r_1<\infty$，$0<s\leqslant\infty$，若 $r_0\neq r_1$，$\frac{1}{r}=\frac{1-\theta}{r_0}+\frac{\theta}{r_1}$，则
$$({}_pH_{r_0}^\sigma(X),{}_pH_{r_1}^\sigma(X))_{\theta,s}={}_pH_{r,s}^\sigma(X)\tag{8.2.9}$$
$$({}_pQ_{r_0}(X),{}_pQ_{r_1}(X))_{\theta,s}={}_pQ_{r,s}(X)\tag{8.2.10}$$
$$(D_{r_0}(X),D_{r_1}(X))_{\theta,s}=D_{r,s}(X)\tag{8.2.11}$$

定理 8.2.3 假设 X 是 Banach 空间，$2\leqslant q<\infty$，$0<r$，$s<\infty$. 则下列条件等价：

(i) X 是 q 一致可凸空间；

(ii) 存在常数 $C=C_{q,r,s}>0$，使得对任意 X-值鞅 $f=(f_n)_{n\geqslant0}$ 成立
$$\|f\|_{{}_qH_{r,s}^\sigma(X)}\leqslant C\|f\|_{D_{r,s}(X)}\tag{8.2.12}$$

证明 若 $r=s$，此定理恰好是 Liu[61] 中的定理 6. 若 $r\neq s$，容易选择适当的 $\theta,r_0,r_1,r_0\neq r_1$ 使得 (8.2.9)式和 (8.2.11)式成立.

若 X 同构于 q 一致凸空间，则存在常数 C_{r_0}，C_{r_1}，使得
$$\|f\|_{{}_qH_{r_0}^\sigma(X)}\leqslant C_{r_0}\ \|f\|_{D_{r_0}(X)}\tag{8.2.13}$$
$$\|f\|_{{}_qH_{r_1}^\sigma(X)}\leqslant C_{r_1}\ \|f\|_{D_{r_1}(X)}\tag{8.2.14}$$
于是
$$K(t,f,{}_qH_{r_0}^\sigma(X),D_{r_0}(X))=\inf_{f=f_0+f_1}\left\{\|f_0\|_{{}_qH_{r_0}^\sigma(X)}+t\ \|f_1\|_{{}_qH_{r_1}^\sigma(X)}\right\}$$
$$\leqslant C_{r_0}K(C_{r_0}^{-1}C_{r_1}t,f,D_{r_0}(X),D_{r_1}(X))\tag{8.2.15}$$
由 (8.2.9)式，(8.2.11)式和(8.2.15)式得
$$\|f\|_{{}_qH_{r,s}^\sigma(X)}\leqslant C\|f\|_{({}_qH_{r_0}^\sigma(X),{}_qH_{r_1}^\sigma(X))_{\theta,s}}$$
$$=C\left(\int_0^\infty\left(t^{-\theta}K(t,f,{}_qH_{r_0}^\sigma(X),{}_qH_{r_1}^\sigma(X))\right)^s\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{1/s}$$
$$\leqslant C\left(\int_0^\infty\left(t^{-\theta}K(t,f,D_{r_0}(X),D_{r_1}(X))\right)^s\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{1/s}$$
$$=C\|f\|_{(D_{r_0}(X),D_{r_1}(X))_{\theta,s}}$$
$$\leqslant C\|f\|_{D_{r,s}(X)}$$
(8.2.12)式中不等式得证.

另一方面，若 (8.2.12)式成立，定义算子 T 如下：
$$T:D_{r,s}(X)\to{}_qH_{r,s}^\sigma(X)\quad 并且\quad T(f)=f$$
由 (8.2.12)式知，T 有界. 特别地，对 Walsh-Paley 鞅 $f=(f_n)_{n\geqslant0}$，若 $\|f\|_\infty=\sup_n\|f_n\|_\infty<\infty$，则
$$\|Tf\|_{{}_qH_{r,s}^\sigma(X)}=\left(\frac{r}{s}\int_0^\infty\left(t^{1/r}\tilde{\sigma}^{(p)}(f)*(t)\right)^s\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{1/s}$$
从而 $\sigma^{(p)}(f)<\infty$，$a.e.$，即 X 同构于 q 一致凸空间. □

§8.3　鞅 Hardy 空间与 BMO 空间的实内插

对于函数空间，1977 年 Hanks 给出了 Hardy 空间与 BMO 空间的实内插空间[45]，证明了：

$$(H_{r_0,s_0}, \mathrm{BMO})_{\theta,s} = H_{r,s}, \qquad \frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{r_0}$$

$$0 < \theta < 1, \quad 0 < r_0 < \infty, \quad 0 < s_0, s \leqslant \infty$$

最近，对于实值鞅，Weisz[79] 证明了类似的结论. 本节将之推广到 Banach 空间值鞅. 首先，无需正规性条件，给出 ${}_pH_r^\sigma(X)$ 和 ${}_pBMO_p^\sigma(X)$ 之间的实内插空间. 其次，在正规性条件下，分别给出 ${}_pH_r^S(X)$ 与 ${}_pBMO_r^S(X)$，$H_r(X)$ 与 $BMO_2(X)$ 之间的实内插空间.

一、${}_pH_r^\sigma(X)$ 与 ${}_pBMO_p^\sigma(X)$ 之间的实内插

定理 8.3.1　设 X 是 Banach 空间，$1 < p < \infty$. 若 $0 < \theta < 1$，$0 < s \leqslant \infty$，$0 < r_0 < \infty$，则

$$({}_pH_{r_0}^\sigma(X), {}_pBMO_p^\sigma(X))_{\theta,s} = {}_pH_{r,s}^\sigma(X)$$

其中：$\dfrac{1}{r} = \dfrac{1-\theta}{r_0}$.

证明　首先，对任意鞅 $f = (f_n)_{n\geqslant 0}$，有

$$\|f\|_{{}_pBMO_p^\sigma(X)} = \sup_n \|(E_n(\sigma^{(p)}(f)^p - \sigma_n^{(p)}(f)^p)^{1/p}\|_\infty$$
$$\leqslant 2\|\sigma^{(p)}(f)\|_\infty = 2\|f\|_{{}_pH_\infty^\sigma(X)}$$

则

$$\|f\|_{({}_pH_{r_0}^\sigma(X), {}_pBMO_p^\sigma(X))_{\theta,s}}$$
$$\leqslant C\|f\|_{({}_pH_{r_0}^\sigma(X), {}_pH_\infty^\sigma(X))_{\theta,s}} = C\|f\|_{{}_pH_{r,s}^\sigma}$$

其中：$\dfrac{1}{r} = \dfrac{1-\theta}{r_0}$.

反过来，考虑算子 $T_u^{\sigma(p)}: f \to f_u^{\sigma(p)}$ 对给定的 $0 < u < r_0$，显然 $T_u^{\sigma(p)}$ 是拟线性的，根据定理 5.2.1 知，$T_u^{\sigma(p)}: {}_pH_{r_0}^\sigma(X) \to L_{r_0}$ 有界.

同时有

$$f_u^{\sigma(p)} = \sup_n ((E_n(\sigma^{(p)}(f)^p - \sigma_n^{(p)}(f)^p)^{u/p})^{1/u}$$
$$\leqslant \sup_n ((E_n(\sigma^{(p)}(f)^p - \sigma_n^{(p)}(f)^p)^{\frac{r_0}{p}})^{\frac{1}{r_0}}$$
$$\leqslant \sup_n \|(E_n(\sigma^{(p)}(f)^p - \sigma_n^{(p)}(f)^p)^{\frac{r_0}{p}})^{\frac{1}{r_0}}\|_\infty$$
$$= \|f\|_{{}_pBMO_{r_0}^\sigma(X)} \tag{8.3.1}$$

易证所有 ${}_pBMO_r^\sigma(X)$ 是范数等价的. 由 (8.3.1) 式知，算子 $T_u^{\sigma(p)}: {}_pBMO_p^\sigma(X) \to L_\infty$ 有界. 利用 Riesz-Thorin 定理和 Marcinkiewicz 内插定理[5]，得

$$T_u^{\sigma(p)}: ({}_pH_{r_0}^\sigma(X), {}_pBMO_p^\sigma(X))_{\theta,s} \to (L_{r_0}, L_\infty)_{\theta,s} = L_{r,s}$$

也有界，其中：$\dfrac{1}{r} = \dfrac{1-\theta}{r_0}$.

而 $f \in \left({}_pH_{r_0}^\sigma(X), {}_pBMO_p^\sigma(X)\right)_{\theta,r}$ 蕴含

$$\|f\|_{{}_pH_r^\sigma(X)} \leqslant C\|f_u^{\sigma(p)}\|_r \leqslant C\|f\|_{({}_pH_{r_0}^\sigma(X), {}_pBMO_p^\sigma(X))_{\theta,r}}$$

从而，当 $r = s$ 时，定理得证，即

$$({}_pH_{r_0}^\sigma(X), {}_pBMO_p^\sigma(X))_{\theta,r} = {}_pH_{r,r}^\sigma(X), \qquad \frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{r_0} \tag{8.3.2}$$

利用重复定理，得

$$({}_pH_{r_0}^\sigma(X), {}_pBMO_p^\sigma(X))_{\theta,s}$$
$$= ({}_pH_{r_0}^\sigma(X), ({}_pH_{r_0}^\sigma(X), {}_pBMO_p^\sigma(X))_{\theta_1, \frac{r}{1-\theta_1}})_{\eta,s}$$

其中：$0 < \theta_1, \eta < 1$，$\theta_1\eta = \theta$. 由 (8.3.2) 式和推论 8.2.2，得

$$({}_pH_{r_0}^\sigma(X), {}_pBMO_p^\sigma(X))_{\theta,s} = ({}_pH_{r_0}^\sigma(X), {}_pH_{r_0/(1-\theta_1)}^\sigma(X))_{\eta,s}$$
$$= {}_pH_{r,s}^\sigma(X)$$

其中：$\frac{1}{r'}=\frac{1-\eta}{r_0}+\frac{1-\theta_1}{r_0}\eta=\frac{1-\theta_1\eta}{r_0}=\frac{1-\theta}{r_0}=\frac{1}{r}$. 故 $r=r'$，定理得证. □

根据定理 8.3.1 和推论 4.3.1 及 4.3.2，可得以下结果：

推论 **8.3.1**　设 $1<p\leqslant 2$，$2\leqslant q<\infty$，$0<\theta<1$，$0<s\leqslant\infty$ 且 $0<r_0<\infty$

(i) 若 X 是 p 一致可光滑空间，则

$$\left({}_pH^{\sigma}_{r_0}(X),\ BMO^{+}_{p}(X)\right)_{\theta,s}\supset {}_pH^{\sigma}_{r,s}(X),\qquad \frac{1}{r}=\frac{1-\theta}{r_0}$$

(ii) 若 X 是 q 一致可凸空间，则

$$\left({}_qH^{\sigma}_{r_0}(X),\ BMO^{+}_{q}(X)\right)_{\theta,s}\subset {}_qH^{\sigma}_{r,s}(X),\qquad \frac{1}{r}=\frac{1-\theta}{r_0}$$

二、${}_p\boldsymbol{H}^S_r(\boldsymbol{X})$和${}_p\boldsymbol{BMO}^S_p(\boldsymbol{X})$，$\boldsymbol{H}_r(\boldsymbol{X})$和 $\boldsymbol{BMO}_2(\boldsymbol{X})$的实内插

设 $(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_n\}_{n\geqslant 0},P)$ 如通常定义，称其为满足正规性条件，若存在常数 $R>0$，使得

$$\chi_F\leqslant RE(\chi_F\mid\mathscr{F}_{n-1}),\qquad \forall F\in\mathscr{F}_n,\qquad n\geqslant 1$$

在正规性条件下，Long-Liu[66] 研究了 ${}_pH^S_r(X)$ 和 $H_r(X)$ 的实内插，证明了：

引理 **8.3.2**[66]　设 X 是 Banach 空间，$(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_n\}_{n\geqslant 0},\mu)$ 满足正规性条件. 若 $0<a$，$b\leqslant\infty$，$a\neq\infty$，$0<\theta<1$，$r=\frac{a}{1-\theta}$，$1<p<\infty$，则

$$\left({}_pH^S_a(X),{}_pH^S_\infty(X)\right)_{\theta,b}={}_pH^S_{r,b}(X)\tag{8.3.3}$$

和

$$(H_a(X),\ H_\infty(X))_{\theta,b}=H_{r,b}(X)\tag{8.3.4}$$

引理 **8.3.3**[66]　设 X 是 Banach 空间，$(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_n\}_{n\geqslant 0},\mu)$ 满足正规性条件. 若 $0<r_i$，$s_i\leqslant\infty$，$r_i\neq\infty$，$i=0,1$，$r_0\neq r_1$，$0<\theta<1$，$\frac{1}{r}=\frac{1-\theta}{r_0}+\frac{\theta}{r_1}$，$1\leqslant s\leqslant\infty$，$1<p<\infty$，则

$$\left({}_pH^S_{r_0,s_0}(X),{}_pH^S_{r_1,s_1}(X)\right)_{\theta,s}={}_pH^S_{r,s}(X)\tag{8.3.5}$$

和

$$\left(H_{r_0,s_0}(X),\ H_{r_1,s_1}(X)\right)_{\theta,s}=H_{r,s}(X).\tag{8.3.6}$$

定理 **8.3.4**　设 X 是 Banach 空间，$(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_n\}_{n\geqslant 0},\mu)$ 满足正规性条件. 若 $1<p<\infty$，$0<\theta<1$，$0<s\leqslant\infty$，$0<r_0<\infty$，则

$$\left({}_pH^S_{r_0}(X),{}_pBMO^S_p(X)\right)_{\theta,s}={}_pH^S_{r,s}(X),\qquad \frac{1}{r}=\frac{1-\theta}{r_0}\tag{8.3.7}$$

证明　首先，对任意 X-值正规鞅 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$，有

$$\|f\|_{{}_pBMO^S_p(X)}=\sup_n\left\|E_n\left(S^{(p)}(f)^p-S^{(p)}_{n-1}(f)^p\right)^{1/p}\right\|_\infty$$

$$\leqslant 2\|S^{(p)}(f)\|_\infty=2\|f\|_{{}_pH_\infty(X)}$$

由引理中的(8.3.3)式，得

$$\|f\|_{({}_pH^S_{r_0}(X),{}_pBMO^S_p(X))_{\theta,s}}$$

$$\leqslant C\|f\|_{({}_pH^S_{r_0}(X),{}_pH^S_\infty(X))_{\theta,s}}$$

$$=C\|f\|_{{}_pH^S_{r,s}(X)}$$

其中 $\frac{1}{r}=\frac{1-\theta}{r_0}$，即 ${}_pH^S_{r,s}(X)\subset\left({}_pH^S_{r_0}(X),{}_pBMO^S_p(X)\right)_{\theta,s}$.

反过来，考虑算子 $T^{S(p)}_u:f\to f^{S(p)}_u$，对给定的 $0<u<r_0$，显然，$T^{S(p)}_u$ 为拟线性且由定理 7.1.3 知 $T^{S(p)}_u:{}_pH^S_{r_0}(X)\to L_{r_0}$ 有界，从而得

$$f^{S(p)}_u=\sup_n\left(E_n\left(S^{(p)}(f)^p-S^{(p)}_{n-1}(f)^p\right)^{u/p}\right)^{1/u}$$

$$\leqslant\sup_n\left(E_n\left(S^{(p)}(f)^p-S^{(p)}_{n-1}(f)^p\right)^{\frac{r_0}{p}}\right)^{\frac{1}{r_0}}$$

$$\leqslant\sup_n\left\|\left(E_n\left(S^{(p)}(f)^p-S^{(p)}_{n-1}(f)^p\right)^{\frac{r_0}{p}}\right)^{\frac{1}{r_0}}\right\|_\infty$$

$$= \| f \|_{{}_pBMO^S_{r_0}(X)} \qquad (8.3.8)$$

易证所有 ${}_pBMO^S_r(X)$，$(0 < r < \infty)$ 是范数等价的. 根据定理 7.1.3 中的 (7.1.6)式知，算子 $T_u^{S(p)}: {}_pBMO^S_p(X) \to L_\infty$ 有界. 运用 Riesz-Thorin 定理和 Marcinkiewicz 定理[5]，并由 $T_u^{S(p)}$ 的拟线性性质，得

$$T_u^{S(p)}: \left({}_pH^S_{r_0}(X), {}_pBMO^S_p(X)\right)_{\theta,s} \to (L_{r_0}, L_\infty)_{\theta,s} = L_{r,s}$$

也有界，其中 $\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{r_0}$. 于是，由定理 7.1.3 知，$f \in ({}_pH^S_{r_0}(X), {}_pBMO^S_p(X))_{\theta,r}$ 蕴含：

$$\| f \|_{{}_pH^S_r(X)} \leqslant C \| f_u^{S(p)} \|_r \leqslant C \| f \|_{({}_pH^S_{r_0}(X), {}_pBMO^S_p(X))_{\theta,r}}$$

于是，当 $r = s$ 时，定理得证，即

$$\left({}_pH^S_{r_0}(X), {}_pBMO^S_p(X)\right)_{\theta,r} = {}_pH^S_{r,r}(X), \qquad \frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{r_0} \qquad (8.3.9)$$

由重复定理得

$$\begin{aligned}&\left({}_pH^S_{r_0}(X), {}_pBMO^S_p(X)\right)_{\theta,s}\\ &= \left({}_pH^S_{r_0}(X), ({}_pH^S_{r_0}(X), {}_pBMO^S_p(X))_{\theta_1,\frac{r}{1-\theta_1}}\right)_{\eta,s}\end{aligned}$$

其中 $0 < \theta_1$，$\eta < 1$ 且 $\theta_1 \eta = \theta$. 于是，由 (8.3.9)式和引理 8.3.2 得

$$\begin{aligned}\left({}_pH^S_{r_0}(X), {}_pBMO^S_p(X)\right)_{\theta,s} &= \left({}_pH^S_{r_0}(X), {}_pH^S_{r_0/(1-\theta_1)}(X)\right)_{\eta,s}\\ &= {}_pH^S_{r',s}(X)\end{aligned}$$

其中：$\frac{1}{r'} = \frac{1-\eta}{r_0} + \frac{1-\theta_1}{r_0}\eta = \frac{1-\theta_1\eta}{r_0} = \frac{1-\theta}{r_0} = \frac{1}{r}$.

所以 $r = r'$. □

由不等式(7.1.5)和引理 8.3.2 及 8.3.3，可得：

定理 8.3.5 设 X 是 Banach 空间，$(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_n\}_{n\geqslant 0}, \mu)$ 满足正规性条件. 若 $0 < \theta < 1$，$0 < s \leqslant \infty$，$1 < r_0 < \infty$，则

$$\left(H_{r_0}(X), BMO_2(X)\right)_{\theta,s} = H_{r,s}(X), \qquad \frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{r_0}$$

根据定理 8.3.4 和推论 4.3.1 及 4.3.2，可得：

推论 8.3.2 设 X 是 Banach 空间，$(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_n\}_{n\geqslant 0}, \mu)$ 满足正规性条件. 若 $1 < p \leqslant 2$，$2 \leqslant q < \infty$，$0 < \theta < 1$，$0 < s \leqslant \infty$ 且 $0 < r_0 < \infty$，

(i) 若 X 是 p 一致可光滑空间，则

$$\left({}_pH^S_{r_0}(X), BMO_p(X)\right)_{\theta,s} \supset {}_pH^S_{r,s}(X)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{r_0}$$

(ii) 若 X 是 q 一致可凸空间，则

$$\left({}_qH^S_{r_0}(X), BMO_q(X)\right)_{\theta,s} \subset {}_qH^\sigma_{r,s}(X)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{r_0}$$

§8.4 内插空间的共轭

运用上节所得结论讨论内插空间的共轭问题，将证明鞅 Hardy-Lorentz 空间的共轭空间仍是 Hardy-Lorentz 空间.

定理 8.4.1 设 X 是自反 Banach 空间. 若 $1 < p < \infty$，$1 < r < p$，$1 \leqslant s < \infty$，则 ${}_pH^\sigma_{r,s}(X)$ 的共轭空间是 ${}_qH^\sigma_{r',s'}(X^*)$，其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$，$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$，且 X^* 是 X 的共轭空间.

证明 首先由对偶定理(见定理 8.1.3)，得

$$\left({}_pH^\sigma_1(X), {}_pH^\sigma_p(X)\right)^*_{\theta,s} = \left({}_qBMO^\sigma_q(X^*), {}_qK^\sigma_q(X^*)\right)_{\theta,s'}$$

其次，对任给 $1 < r < p$，存在 $0 < \theta < 1$，使得 $1/r = (1-\theta) + \theta/p$，于是由引理 8.3.2，得

$${}_pH^\sigma_{r,s} = ({}_pH^\sigma_1(X), {}_pH^\sigma_p(X))_{\theta,s}$$

然而，根据定理 4.4.3，8.3.4 可知：

$${}_qK^\sigma_q(X^*) = {}_qH^\sigma_q(X^*)$$

得

$$\begin{aligned}({}_pH^\sigma_{r,s}(X))^* &= \left({}_qBMO^\sigma_q(X^*), {}_qK^\sigma_q(X^*)\right)_{\theta,s'}\\ &= \left({}_qK^\sigma_q(X^*), {}_qBMO^\sigma_q(X^*)\right)_{1-\theta,s'}\\ &= \left({}_qH^\sigma_q(X^*), {}_qBMO^\sigma_q(X^*)\right)_{1-\theta,s'}\\ &= {}_qH^S_{r',s'}(X^*)\end{aligned}$$

其中：$\frac{1}{r} = (1-\theta) + \frac{\theta}{p}$，$\frac{1}{r'} = \frac{\theta}{p'} = \frac{\theta}{q}$，于是 $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$，定理得证. □

推论 8.4.1 设 X 是自反 Banach 空间. 若 $1 < p < \infty$，$1 < r < p$，则 ${}_pH^\sigma_r(X)$ 的共轭空间是 ${}_qH^\sigma_{r'}(X^*)$，其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$，$X^*$ 是 X 的共轭空间.

证明 在定理 8.4.1 中令 $r = s$ 即得. □

运用定理 8.3.2 和定理 4.4.3，可得关于 ${}_pH^S_{r,s}(X)$ 的类似结论：

定理 8.4.2 设 X 是自反 Banach 空间，$(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_n\}_{n\geqslant 0}, \mu)$ 满足正规性条件. 若 $1 < p < \infty$，$1 < r < p$，$1 \leqslant s < \infty$，则 ${}_pH^S_{r,s}(X)$ 的共轭空间是 ${}_qH^S_{r',s'}(X^*)$，其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$，$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$，且 X^* 是 X 的共轭空间.

推论 8.4.2 设 X 是自反 Banach 空间，$(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_n\}_{n\geqslant 0}, \mu)$ 满足正规性条件. 若 $1 < p < \infty$，$1 < r < p$，则 ${}_pH^S_r(X)$ 的共轭空间是 ${}_qH^S_{r'}(X^*)$，其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$，且 X^* 是 X 的共轭空间.

证明 在定理 8.4.2 中令 $r = s$ 即得. □

注*：在正规性条件下，${}_pH^\sigma_r(X)$ 等价于 ${}_pH^S_r(X)$ $(0 < r < \infty)$，于是推论 8.4.2 可以看作推论 8.4.1 的推论.

定理 8.4.3 设 X 是自反 Banach 空间，$(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_n\}_{n\geqslant 0}, \mu)$ 满足正规性条件. 若 $1 < r < 2$，$1 \leqslant s < \infty$，则 $H_{r,s}(X)$ 的共轭空间是 $H_{r',s'}(X^*)$，其中 $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$，$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$ 且 X^* 是 X 的共轭空间.

证明 由对偶定理（见定理 8.1.3），得

$$(H_1(X), H_2(X))^*_{\theta,s} = \left(BMO_2(X^*), H_2(X^*)\right)_{\theta,s'}$$

而对任意 $1 < r < 2$，存在 $0 < \theta < 1$，使得 $1/r = (1-\theta) + \theta/2$，由引理 8.3.2，得

$$H_{r,s}(X) = \left(H_1(X), H_2(X)\right)_{\theta,s}$$

从而由定理 5.3.3，得

$$\begin{aligned}(H_{r,s}(X))^* &= \left(BMO_2(X^*), H_2(X^*)\right)_{\theta,s'}\\ &= \left(H_2(X^*), BMO_2(X^*)\right)_{1-\theta,s'}\\ &= H_{r',s'}(X^*)\end{aligned}$$

其中 $\frac{1}{r} = (1-\theta) + \frac{\theta}{2}$ 且 $\frac{1}{r'} = \frac{\theta}{2}$，于是 $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$，定理得证. □

推论 8.4.3 设 X 是自反 Banach 空间，$(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_n\}_{n\geqslant 0}, \mu)$ 满足正规性条件. 若 $1 < r < 2$，则 $H_r(X)$ 的共轭空间是 $H_{r'}(X^*)$，其中 $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$ 且 X^* 是 X 的共轭空间.

证明 在定理 8.4.3 中取 $r = s$ 即得. □

注*：(1) 在正规性条件下，实值鞅空间 ${}_2H^\sigma_r(R)$，${}_2H^S_r(R)$ 和 $H_r(R)$ 等价. 然而，对 B-值鞅，空间 ${}_pH^\sigma_r(X)$ 和 ${}_pH^S_r(X)$ 并不等价于 $H_r(X)$.

(2) 由 Doob 不等式，当 $r > 1$ 时，$H_r(X)$ 等价于 $L_r(X)$，于是推论

8.4.3 的结论是平凡的.

§8.5　原子分解在内插理论中的应用

本节将运用原子分解对上一节中的部分内插问题作重新讨论. 尽管所得结果与前面一样，但方法上要简单得多.

首先运用原子分解给出 $D_r(X)$ 鞅的一种新的分解.

引理 8.5.1　设 X 是 Banach 空间且具有 Radon-Nikodym 性质，$f=(f_n)_{n\geqslant 0}\in D_p(X)$，$y>0$，$0<p\leqslant 1$. 则 f 可分解为两个鞅 $g=(g_n)_{n\geqslant 0}$ 与 $h=(h_n)_{n\geqslant 0}$ 的和，使得

$$\|g\|_{D_\infty(X)}\leqslant 4y \tag{8.5.1}$$

及

$$\|h\|_{D_r(X)}\leqslant C_r\left(\int_{\{\lambda_\infty>y\}}\lambda_\infty^r\,\mathrm{d}P\right)^{1/r} \tag{8.5.2}$$

其中正常数 C_r 仅依赖于 r，λ_n 为 $\|f_n\|$ 的最小非负不减可料控制.

证明　选择适当的 $M\in Z$，使得 $2^{M-1}<y\leqslant 2^M$，记停时 τ_k，原子 a^k 和实数列 $\mu_k(k\in Z)$ 如引理 2.3.1 中所述（见 Liu and Hou[60]）. 令

$$g_n=\sum_{k=-\infty}^{M}\mu_k E_n a^k\quad(n\geqslant 0)$$

和

$$h_n=\sum_{k=M+1}^{\infty}\mu_k E_n a^k\quad(n\geqslant 0)$$

显然 $f_n=g_n+h_n$，$n\geqslant 0$ 且 $g=f^{\tau_{M+1}}$. 由 τ_k 的定义得

$$\|g\|_{D_\infty(X)}=\|f^{\tau_{M+1}}\|_{D_\infty(X)}\leqslant 2^{M+1}\leqslant 4y$$

不等式(8.5.1)得证.

另一方面，有

$$\|h\|_{D_r(X)}^r\leqslant\sum_{k=M+1}^{\infty}\mu_k^r=3^r\sum_{k=M+1}^{\infty}(2^k)^r P(\lambda_\infty>2^k)$$

运用 Abelian 重排，得

$$\|h\|_{D_r(X)}^r\leqslant C_r\int_{\{\lambda_\infty>2^M\}}\lambda_\infty^r\,\mathrm{d}P$$
$$\leqslant C_r\int_{\{\lambda_\infty>y\}}\lambda_\infty^r\,\mathrm{d}P$$

定理得证.　□

定理 8.5.2　设 X 是 Banach 空间且具有 Radon-Nikodym 性质，$0<\theta<1$，$0<r_0\leqslant 1$，$0<s\leqslant\infty$，则

$$\left(D_{r_0}(X),D_\infty(X)\right)_{\theta,s}=D_{r,s}(X),\quad\frac{1}{r}=\frac{1-\theta}{r_0} \tag{8.5.3}$$

证明　设 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}\in D_{r,s}(X)$，$\lambda_n$ 为 $\|f_n\|$ 的最小非负不减可料控制，且 $\lambda_\infty=\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n$. 记 $\tilde{\lambda}_\infty(t)$ 为 λ_∞ 的非增重排. 令 $\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{r_0}$，选择引理 8.5.1 中的 $y>0$，使得 $y=\lambda_\infty^*(t^\gamma)$ 对给定的 $t\in[0,1]$. 对于 y 记其在引理 8.5.1 中被分解成的两个鞅为 g_t 和 h_t. 于是有

$$K\left(t,f,D_{r_0}(X),D_\infty(X)\right)$$
$$\leqslant\|h_t\|_{D_{r_0}(X)}+t\|g_t\|_{D_\infty(X)}$$

由引理 8.5.1，得

$$\|h_t\|_{D_{r_0}(X)}\leqslant C\left(\int_{\{\lambda_\infty>\tilde{\lambda}_\infty(t^\gamma)\}}\lambda_\infty^{r_0}\,\mathrm{d}P\right)^{1/r_0}$$
$$=C\left(\int_0^{t^\gamma}\tilde{\lambda}_\infty(\tau)^{r_0}\,\mathrm{d}\tau\right)^{1/r_0}$$

从而

$$\int_0^1\left(t^{-\theta}\|h_t\|_{D_{r_0}(X)}\right)^s\frac{\mathrm{d}t}{t}$$
$$\leqslant C\int_0^1 t^{-\theta s}\left(\int_0^{t^\gamma}\tilde{\lambda}_\infty(\tau)^{r_0}\,\mathrm{d}\tau\right)^{s/r_0}\frac{\mathrm{d}t}{t}$$
$$\leqslant C\int_0^1 t^{(1-\theta)s/r_0}\left(\frac{1}{t}\int_0^t\tilde{\lambda}_\infty(\tau)^{r_0}\,\mathrm{d}\tau\right)^{s/r_0}\frac{\mathrm{d}t}{t}$$

根据 Hardy 不等式，得

$$\int_0^1 (t^{-\theta} \| h_t \|_{D_{r_0}(X)})^s \frac{dt}{t}$$

$$\leqslant C \int_0^1 t^{(1-\theta)s/r_0} \tilde{\lambda}_\infty(t)^s \frac{dt}{t}$$

$$= C \| \lambda_\infty \|_{r,s}^s \tag{8.5.4}$$

进一步有

$$\int_0^1 (t^{1-\theta} \| g_t \|_{D_\infty(X)})^s \frac{dt}{t} \leqslant C \int_0^1 t^{(1-\theta)s} \tilde{\lambda}_\infty(t^\gamma)^s \frac{dt}{t}$$

取 $u = t^\gamma (= t^{r_0})$，得

$$\int_0^1 (t^{1-\theta} \| g_t \|_{D_\infty(X)})^s \frac{dt}{t} \leqslant C \int_0^1 u^{(1-\theta)s/r_0} \tilde{\lambda}_\infty(u)^s \frac{du}{u}$$

$$= C \| \lambda_\infty \|_{r,s}^s \tag{8.5.5}$$

由(8.5.4)式和(8.5.5)式，得

$$\| f \|_{(D_{r_0}(X), D_\infty(X))_{\theta,s}} = \left(\int_0^1 (t^{-\theta} K(t, f, D_{r_0}(X), D_\infty(X)))^s \frac{dt}{t} \right)^{1/s}$$

$$\leqslant C \| f \|_{D_{r,s}(X)}$$

这表明 $D_{r,s}(X) \subset (D_{r_0}(X), D_\infty(X))_{\theta,s}$.

反之，考虑 $T(f) = \lambda_\infty$，则 $T: D_{r_0}(X) \to L_{r_0}$ 和 $T: D_\infty(X) \to L_\infty$ 有界. 从而

$$T: \left(D_{r_0}(X), D_\infty(X)\right)_{\theta,s} \to (L_{r_0}, L_\infty)_{\theta,s} = L_{r,s}$$

有界，即 $f \in (D_{r_0}(X), D_\infty(X))_{\theta,s}$，从而

$$\| f \|_{D_{r,s}(X)} = \| \lambda_\infty \|_{L_{r,s}} \leqslant \| f \|_{(D_{r_0}(X), D_\infty(X))_{\theta,s}}$$

这表明 $(D_{r_0}(X), D_\infty(X))_{\theta,s} \subset D_{r,s}(X)$. 于是当 $0 < s < \infty$ 时，定理得证. 对以上过程稍加修改可证，当 $s = \infty$ 时，定理仍然成立. □

参 考 文 献

1 Bassily N L, Mogyorodi J. On the BMO_Φ-Spaces with General Young Function. Ann Univ Sci Budapest Rclando Eötvös, Sect Math, 1984. 27: 215～227

2 Bassily N L, Mogyorodi J. On the K_Φ-Spaces with General Young Functon. Ann Univ Sci Budapest Rclando Eötvös, Sect Math, 1984. 27: 205～214

3 Bennett C, Sharpley R. Interpolaton of Operators. Pure and Applied Mathematics, New York: Academic Press, 1988. 129

4 Bennett C, Sharpley R. Weak Type Inequalities for H^p and BMO, Harmonic Analysis in Euclidean Spaces. American Mathematical Society, 1979

5 Bergh J, Löfström J. Interpolation Spaces, An Introduction. Berlin, Heidedberg, New York: Springer, 1976

6 Bermard A, Muisonneuve B. Decomposition Atomique de Martingale de la Class H_1, Lecture Notes in Mathematics, Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlay, 1977. 581: 303～323

7 Blasco O, Xu Q. Interpolation Between Vector-valued Hardy Spaces. J Func Anal, 1991. 102: 331～359

8 Bourgain J. A Hausdorff-Young Inequality for B-convex Banach Spaces. Pacific Journal of Mathematics, 1982. 100(2):

94～102
9 Bourgain J. Vector-Valued Hausdorff-Young Inequalities and Applications. Lecture Notes in Mathematics, Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlay, 1988. 1317: 239～249
10 Bukhvalov A V, Danilevich A A. Boundary Properties of Analytic and Harmonic Functions with Values in Banach Spaces. Math Notes, 1982. 31: 104～110
11 Burkholder D L. A Geometrical Characterization of Banach Spaces in Which Martingale Difference Sequence Are Unconditional. Ann Probab, 1981. 9: 997～1011
12 Burkholder D L. Martingale Tansforms and the Geometry of Banach Spaces. Lecture Notes in Mathematics, Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlay, 1981. 860: 35～50
13 Burkholder D L. Distribution Function Inequalities for Martingales. Ann Probab, 1973. 1: 19～42
14 Burkholder D L, Davis B J, Gundy R F. Integral Inequalities for Convex Functions of Operations on Martingales. Math Statist Probab, 1972. 2: 223～240
15 Burkholder D L, Gundy R F. Extrapolation and Interpolation of Quasi-linear Operator on Martingales. Acta Math, 1970. 124: 249～304
16 Cairoli R, Walsh J B. Stochastic Integrals in the Plane. Acta Math, 1975. 134: 111～183
17 Chao J A. Hardy Spaces on Regular Martingales. Lecture Notes in Mathematics, Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlay, 1982. 939: 18～28
18 Chao J A, Long R L. Martingale Transforms and Hardy Spaces. Probab Th Rel Fields, 1992. 91: 399～404

19 Chatterji S D. Martingale Convergence and the Radon-Nikodym Theorem in Banach Spaces. Math Scand, 1968. 22: 21～41
20 Chevalier L. L^p-inequalities for Two-parameter Martingales, Stochastic Integrals. Lecture Notes in Mathematics, Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlay., 1981. 851: 470～475
21 Coifman R R. A Real Variable Characterization of H^p. Studia Math, 1974. 51: 269～274
22 Coifman R R, Jones P, Semmers S. Tow Elementary Proof of the L^2-boundedness of Cauchy Integrals on Lipschitz Curves. J Amer M S, 1989. 2:553～564.
23 Coifman R R, Weiss G. Extensions of Hardy Spaces and Their Uses in Analysis. Bull Amer Math Soci, 1977. 83: 569～646
24 Davis B J. On the Integrability of the Martingale Square Function. Israel J Math, 1970. 8: 187～190
25 Davis W J. Moduli of Complex Convexity, Geometry of Banach Spaces. Proc of the Conference held in Stroble, Austria, 1989. 65～70
26 Davis W J, Garling D J H, Tomczak-Jaegermann N. The Complex Convexity of Quasi-normed Linear Spaces. J Funct Anal, 1984. 55: 110～150
27 定光桂(Ding Guanggui). 巴拿赫空间引论. 北京：科学出版社，1984
28 邓东皋(Deng D G)，韩永生(Han Y S). H^p空间论. 北京：北京大学出版社，1992
29 Doob J L. Semimartingales and Subharmonic Functions. Trans Amer Math Soci, 1954. 77: 86～121

30 Dowling P N. Representable Operator and the Analytic Radon-Nikodym Property in Banach Spaces. Proc R Ir Acad, 1985. 85A: 143～150

31 Dowling P N, Edgar G A. Some Characterizations of the Analytic Radon-Nikodym Property in Banach Spaces. J Func Anal, 1988. 80:349～357

32 Duren P L, Romberg B W, Shields A L. Linear Functionals on H^p Spaces with $0<p<1$. J—Reine Angew Math, 1969. 238: 32～60

33 Durret R. Brownian Motion and Martingales in Analysis. Wndsworth Advanced Books and Software, Belmont, California, 1984

34 Echandia V. Interpolation between Dyadic Hardy Spaces H^p: the Real Method. Ann Univ Soc Budapaest, SECTIO MATH, 1988. 31: 26～266

35 Edgar G A. On the Radon-Nikodym Property and Martingale Convergence. Lecture Notes in Mathematics, Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlay, 1978. 645: 62～76

36 Edgar G A. Extremal Integral Repesentations. J Functional Analysis, 1976. 23(2): 145～161

37 Edgar G A. Complex Martingale Convergence. Lecture Notes in Mathematics, Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlay, 1985. 1166: 38～59

38 Edgar G A. Analystic Martingale Convergence. J Functional Analysis, 1986. 69: 268～280

39 Enflo P. Banach Spaces Which Can Be Gaven an Equivalen Uniformly Convex Norm. Isreal J Math, 1972. 13: 281～288

40 Fefferman C. Characterization of Bounded Mean Oscillation. Bull Amer Math Soci, 1971. 77: 587～588

41 Fefferman C, Riviere N M, Sagher Y. Interpolation between H^p Spaces: the Real Method. Trans Amer Math Soc, 1974. 191: 75～81

42 Fefferman C, Stein E M. H^p Spaces of Several Variables. Acta Math, 1972. 129: 137～194

43 Garling D J H. On Martingales with Values in a Complex Banach Space: Math Proc Combridge Philos Soc, 1988. 104: 399～406

44 Garsia A M. Martingale Inequalities. Seminar Notes on Recent Progress Math. Lecture Notes Series, New York: Benjamin Inc, 1973

45 Hanks R. Interpolation by the Real Method Between BMO, $L^\alpha(0<\alpha<\infty)$ and $H^\alpha(0<\alpha<\infty)$. Indiana Univ Math J, 1977. 26: 679～689

46 Herz C S. Bounded Mean Oscillation and Regulated Martingales. Trans Amer Math Soci, 1974. 193: 199～215

47 Herz C S. H_p-Spaces of Martingales, $0<p\leqslant 1$. Zeit Wahrs, 1974. 28: 189～205

48 Hoffmann-Jørgense J, Pisier G. The Law of Large Numbers and the Central Limit Theorem in Banach Spaces. Ann Probab, 1976. 4: 587～599

49 Hou Y L(侯友良), Liu P D(刘培德). Weighted Inequalities of B-valued Martingales and the Convexity and Smoothness of Banach Spaces. Acta Math Sci, 1993. 13: 71～79

50 Kwapien S. Isomorphic Charactrization of Inner Product Spaces by Orthogonalb Series with Vector Valued Coefficients. Studia Math, 1972. 44: 583～595

51 Ledoux M，Talagrand M. Probability in Banach Spaces. Berlin Heidelberg，New York：Springer-Verlag，1991

52 Liu P D(刘培德). Martingale Spaces and Geometry of Bnanch Space. Science in China(A)，1990. 20(7)：694～704

53 刘培德(Liu P D). 鞅与Bnanch空间几何学. 武汉：武汉大学出版社，1993

54 Liu P D(刘培德). Fefferman's Inequality and the Dual of ${}_a\widetilde{H}_p$. Chinese Ann of Math(A)，1991. 12：356～364

55 Liu P D(刘培德). Martingale Inequalities and the Convexity and smoothness of Banach Spaces. Acta Math，1989. 32：765～775

56 Liu P D(刘培德). The Φ Inequalities for B-valued Regular Martingales and the Geometrical Properties of Banach Spaces. Adv Math，1990. 19：357～365.

57 Liu P D(刘培德). Bekjan T N. Complex Convexity and Hardy Martingale Inequalities. Acta Math，1997. 40：133～143

58 Liu P D(刘培德). Bekjan T N. Φ Inequalities and Law of Large Numbers of Hardy Martingale Transforms. Acta math Sci，1997. 17(3)：343～351

59 Liu P D(刘培德)，Hou Y L(侯友良). On the Geometry of Complex Banach Spaces. Adv in Math，1998. 27(1)：1～20

60 Liu P D(刘培德)，Hou Y L(侯友良). Atomic Decomposition gor B-valued Martingales. Science in China(A)，1998. 28(10)：884～892

61 Liu P D(刘培德)，Long R L(龙瑞麟). Boundedness of Sevreal Operators on Martingale Spaces and Geometry Properties of Banach Spaces. Chinese Ann of Math(A)，1992. 13：167～179

62 Liu P D(刘培德)，Saksman E，Tyllin H O. On WARNP of Banach Spaces. to appear

63 Liu P D(刘培德)，Yu Lin(于 林). B-valued Martingale Spaces with Small Index and Atomic Decomposition. Science in China(A)，2001. 31(17)：615～625

64 Long R L(龙瑞麟). Martingale Spaces and Inequalities. Beijing：Peiking University Press，1993

65 Long R L(龙瑞麟). Martingale proof of Clifford Valued $T(b)$ Theorem on R^d. Bull Sci Math，1994. 118：131～145

66 Long R L(龙瑞麟)，Liu P D(刘培德). Real Interpolation for B-valued Regular Martingale Spaces. Chinese Ann of Math(A)，1993. 14(2)：152～158

67 Maurey B，Pisier G M. Series de variables aleatoires vectorielles independantes et propietes geometriques des espaces de Banach. Mimepraphed notes，Ecole Polytechnique，Paris Novmber，1974

68 Pisier G M. Martingales in Uniformly Convex Banach Spaces. Israel J Math，1975. 20：326～350

69 Pisier G M. Probabilistic Methods in the Geometry of Banach Spaces. Lecture Notes in Mathematics，Berlin，Heidelberg，New York：Springer-Verlay，1986. 1206：167～241

70 Pisier G M. Factorization of Operator Valued Analytic Functions. Advances in Math，1992. 93：61～125

71 Rubio de Francia J L. Martingale and Integral Transform of Banach Space Valued Functions. Lecture Notes in Mathematics，Berlin，Heidelberg，New York：Springer-Verlay，1986. 1221：195～222

72 Stein E M, Weiss G. Intorduction to Fiurier Analysis on Euclidean Spaces. Princeton University Press, 1971

73 Stout W F. Almost Sure Convergence. New York: Academic Press, 1974

74 Wei W Z(魏文展), Liu P D(刘培德). Characterization of PL－Uniformly Convexity of Complex Spaces by Martingales. Kexue Tongbao, 1997. 2: 234～237

75 Weisz F. Dyadic Martingale Hardy and VMO Spaces on the Plane. Acta Math Hung, 1990. 56: 143～154

76 Weisz F. Interpolation between Martingale Hardy and BMO Spaces, the Real Method. Bull Sci Math, 1992. 116: 145～158

77 Weisz F. Martingale Hardy Spaces for $0<p\leqslant 1$. Probab TH Rel Fields, 1990. 84: 361～376

78 Weisz F. Conjugate Martingale Transforms. Studia Math, 1992. 103: 207～220

79 Weisz F. Martingale Hardy Spaces and Their Applications in Fourier Analysis. Lecture Notes in Mathematics(1568), Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1994

80 Weisz F. Martingale Operators and Hardy Spaces Generated by Them. Studia Math, 1995. 114(1): 39～70

81 Woyczynaski W A. Geomotry and Martingales in Banach Spaces. Lecture Notes in Mathematics, Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlay, 1975. 472: 235～275

82 吴从炘(Wu C X), 王廷辅(Wang T F), 陈述涛(Chen S T), 王玉文(Wang Y W). Olicz 空间几何学. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1986

83 Xu Q H(许全华). Inegalites Pour les Martingale de Hardy et Renormege des espaces Quasi-normes. C R Acad Sci Paris Ser I, 1988. 306: 601～604

84 Xu Q H(许全华). Convexites Uniformes et Integalites de Martingales. Math Ann, 1990. 287: 193～211

85 Xu Q H(许全华). Applications du Theoreme de Factorisation Pour des Functions a Valeurs Operateurs. Studia Math, 1990. 95: 273～291

86 俞鑫泰(Yu X T). Banach 空间几何理论. 上海: 华东师范大学出版社, 1986

87 俞鑫泰(Yu X T). Banach 空间选论. 上海: 华东师范大学出版社, 1992

88 于　林, 刘培德. 向量值鞅 Lipschitz 空间 ${}_p\lambda^{\beta}(X)$ 和 ${}_p\Lambda^{\beta}(X)$. 数学学报, 2001. 44(1): 59～68

89 于　林, 许明浩. 线性算子值 Mixingales. 数学物理学报, 1994. 14(4): 435～441

90 于　林. Banach 空间值鞅的两类新型 BMO 空间和 Sharp 算子. 武汉大学学报(自然科学版), 1999. 45(3): 261～265

91 于　林. Real Interpolation between B-valued Martingale Hardy Spaces. Wuhan University Journal of Natural Sciences, 1999. 4(2): 129～134

92 于　林. 复测度鞅变换的收敛性及其应用. 数学杂志, 2000. 20(2): 93～98

93 于　林. Interpolation between B-valued Martingale Hardy and BMO Spaces. 数学杂志, 2002. 22(4): 379～384

94 于　林. B 值鞅的原子分解在内插理论中的一个应用. 应用数学, 1999. 12(3): 114～117

95 于　林, 周少甫. Interpolation between Two-parameter B-valued Martingale Hardy Spaces. 应用数学, 2000. 13(3): 118～122

96 于　林. 平削算子生成的 B 值鞅空间及其原子分解. 应用数

学，2004．17(1)：108～114

97 于 林．The Duals of Vector-valued Martingale Hardy Spaces．Kyungpook Mathematical Journal，2001．41(2)：259～275

98 于 林．向量值鞅空间 ${}_pH_r^S(X)$ 和 ${}_pH_r^\sigma(X)$ 的共轭．应用泛函分析学报，2003．5(4)：362～368

99 于 林．一类小指标鞅空间的原子分解及其应用．数学研究，2000．33(2)：72～77

100 于 林．鞅 Hardy 空间理论．三峡大学学报(自然科学版)，2001．23(6)：564～569

101 于 林．AUMD 空间的实内插．三峡大学学报(自然科学版)，2002．24(2)：171～172

102 于 林．向量值 Vilenkin 鞅的 Hardy 型不等式．三峡大学学报(自然科学版)，2003．25(3)：269～271

103 于 林．B 值亚极限鞅(Mil)及其变换的差序列的 Brunk 型大数定律．三峡大学学报(自然科学版)，2003．25(4)：356～358

104 于 林，王 田．B 值极限鞅差序列的 Brunk 型大数定律．三峡大学学报(自然科学版)，2005．27(1)：88～90